Zadania z indukcji matematycznej

Zadania wybrał Rafał Górak

14 listopada 2017

Zadanie 1 *Pokaż, że:*

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$ *dla* $n \geqslant 1$*;*

(ii) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ *dla* $n \geqslant 1$*;*

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3}$ *dla* $n \geqslant 1$*.*

Zadanie 2 *Pokaż, że* $5^{2n+1} + 2^{2n+1}$ *jest podzielne przez 7 dla dowolnych liczb naturalnych* n*.*

Zadanie 3 *Pokaż, że* $17n^3 + 103n$ *jest podzielne przez 6 dla dowolnych liczb naturalnych* n*.*

Zadanie 4 *Niech* f_n *to ciąg Fibonacciego. Pokaż, że* f_n *i* f_{n+1} *są względnie pierwsze dla* $n \geqslant 1$*.*

Zadanie 5 *Niech* f_n *to ciąg Fibonacciego. Pokaż, że:*

(i) $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$ *dla* $n \geqslant 1$*;*

(ii) $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ *dla* $n \geqslant 1$*;*

(iii) $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ... + (-1)^n f_{n+1} = (-1)^n f_n + 1$ *dla* $n \geqslant 1$*.*

Zadanie 6 *Niech* f_n *to ciąg Fibonacciego. Pokaż, że* f_{2n} *jest podzielne przez* f_n*. Wskazówka: Pokaż, że* $f_{2n} = f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1}$ *oraz* $f_{2n-1} = f_{n-1}^2 + f_n^2$ *dla* $n \geqslant 1$*.*

Zadanie 7 *Pokaż, że wypukły* $n-$*kąt ma* $n(n-3)/2$ *przekątnych.*

Zadanie 8 *Pokaż, że* $\sqrt[n]{n} < 2 - \frac{1}{n}$ *dla* $n \geqslant 2$.

Zadanie 9 *Na ile obszarów dzieli płaszczyznę* n *parami nierównoległych prostych, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie? Wyprowadź wzór i udowodnij go metodą indukcji matematycznej.*

Zadanie 10 *Na okręgu umieszczono* $2n$ *punktów,* n *białych i* n *czarnych. Pchła chce obejść okrąg poruszając się po okręgu, przeciwnie do wskazówek zegara. Wycieczkę uzna za udaną, jeśli w każdym momencie liczba punktów czarnych, które odwiedziła będzie nie większa niż liczba odwiedzonych białych punktów. Pokaż, że zawsze da się tak umieścić pchłę na okręgu, żeby jej wyciczka była udana.*