MINI-Akademia na Politechnice Warszawskiej

Od OMJ do IMO - zadania olimpijskie z geometrii

Zadania z ćwiczeń

Zadanie 1 (OMJ–2019) Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $AC = BC$. Punkt M jest środkiem ramienia AD. Wykaż, że $\angle ACM = \angle CBD$.

Zadanie 2 (OMJ–2019) Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $\angle ABC = 90^\circ$. Dwusieczna $\angle BAD$ przecina odcinek BC w punkcie P. Wykaż, że jeżeli $\angle APD = 45^\circ$ to pole czworokąta $APCD$ jest równe polu trójkąta ABP.

Zadanie 3 (OMJ–2019) Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = 3BC$. Punkty P i Q leżą w tej kolejności wewnątrz boku AB i spełniają warunek $AP = PQ = QB$. Punkt M jest środkiem boku AC. Wykaż, że $\angle PMQ = 90^\circ$.

Zadanie 4 (OMJ–2018) Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $AB + CD = AD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Prosta równoległa do podstaw trapezu i przechodząca przez punkt E przecina ramię AD w punkcie F. Udowodnij, że $\angle BFC = 90^\circ$.

Zadanie 5 (OMJ-2018) Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta równobocznego ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $\angle DME = 60^\circ$. Wykaż, że $AD + BE = DE + \frac{1}{2}AB$.

Zadanie 6 (OMJ–2018) Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AC \neq BC$. Punkt K jest spodkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykaż, że pola czworokątów $AKOC$ i $BKOC$ są równe.

Zadanie 7 (OMJ–2017) Wykaż, że jeżeli przekątne pewnego trapezu przecinają się pod kątem prostym, to suma długości podstaw tego trapezu jest nie większa niż suma długości ramion tego trapezu.

Zadanie 8 (OMJ–2017) Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Punkt E leży na odcinku CD. Wykaż, że jeżeli suma pól trójkątów ACE i BDE jest równa połowie pola trójkąta ABC, to punkt D jest środkiem boku AB lub punkt E jest środkiem odcinka CD.

Zadanie 9 (OM–2019) Punkty X i Y leżą odpowiednio wewnątrz boków AB i CD trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $AX = AY$ oraz odcinek XY przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC. Proste styczne do okręgu opisanego na trójkącie AXY w punktach X i Y przecinają się w punkcie P. Wykaż, że punkty A, B, C i P leżą na jednym okręgu.

Zadanie 10 (OM–2019) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty K_1, K_2 leżą wewnątrz boku AB, punkty L_1, L_2 leżą wewnątrz boku BC, punkty M_1, M_2 leżą wewnątrz boku CD oraz punkty N_1, N_2 leżą wewnątrz boku DA, przy czym punkty $K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ są parami różne i leżą w tej kolejności na jednym okręgu ω. Niech a, b, c, d będą długościami łuków N_2K_1, K_2L_1, L_2M_1 i M_2N_1 okręgu ω niezawierających odpowiednio punktów K_2, L_2, M_2 i N_2. Wykaż, że $a + c = d + d$.

Zadanie 11 (OM–2018) Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Dwusieczna $\angle BAC$ przecina bok BC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku BC. Udowodnij, że prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM jest równoległa do prostej AD.

Zadanie 12 (OM–2017) Symetralna boku BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q, przy czym A i P leżą po tej samej stronie prostej BC. Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC. Punkt S jest środkiem odcinka AQ. Wykaż, że punkty A , B , R i S leżą na jednym okręgu.

Zadanie 13 (OM–2017) Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD przy czym okrąg o średnicy BC jest styczny do prostej AD. Wykaż, że wtedy okrąg o średnicy AD jest styczny do prostej BC.

Zadanie 14 (OM–2017) Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC w punktach D i E odpowiednio. Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC i stycznego do boku BC. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków JD i JE. Proste BM i CN przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Zadanie 15 (IMO–2019) W trójkącie ABC punkt A_1 leży na boku BC, a punkt B_1 leży na boku AC. Niech P i Q będą odpowiednio punktami z odcinków AA_1 i BB_1 takimi, że $PQ \| AB$. Niech P_1 będzie punktem prostej PB_1 takim, że B_1 jest punktem wewnętrznym odcinka PP_1 oraz $\angle PP_1C = \angle BAC$. Podobnie niech Q_1 będzie punktem prostej QA_1 takim, że A_1 jest punktem wewnętrznym odcinka QQ_1 oraz $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Wykaż, że punkty P , Q , P_1 i Q_1 leżą na jednym okręgu.

Zadanie 16 (IMO–2017) Niech R i S będą różnymi punktami leżącymi na okręgu Ω, przy czym odcinek RS nie jest średnicą Ω. Prosta l jest styczna do Ω w punkcie R. Niech T będzie takim punktem, że S jest środkiem odcinka RT. Punkt J wybrano na krótszym łuku RS okręgu Ω tak, że okrąg Γ opisany na trójkącie JST przecina l w dwóch punktach. Niech A będzie punktem przecięcia Γ z l leżącym bliżej punktu R. Prosta AJ przecina Ω ponownie w punkcie K. Udowodnić, że prosta KT jest styczna do okręgu Γ.

Zadanie 17 (IMO–short list 2017) Niech $ABCDE$ będzie pięciokątem wypukłym, w którym $AB = BC = CD$, $\angle EAB = \angle BCD$ oraz $\angle EDC = \angle CBA$. Wykaż, że prosta prostopadła do prostej BC poprowadzona z E i przekątne AC i BD przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 18 (Baltic-Way–2018) Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu ω. Punkt przecięcia ω z AC bliższy A oznaczamy przez E. Niech F będzie drugim końcem średnicy okręgu ω poprowadzonej z E. Prosta styczna do ω w punkcie F przecina boki AB i BC odpowiednio w punktach A_1 i C_1 oraz przedłużenia boków AD i CD odpowiednio w punktach A_2 i C_2. Wykaż, że $A_1C_1 = A_2C_2$.

Zadanie 19 (Baltic-Way–2016) Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg ω. Panadto wiadomo, że prosta AB nie jest równoległa do prostej CD. Niech M będzie środkiem odcinka CD oraz niech P będzie takim punktem wewnętrznym czworokąta $ABCD$, że $AP = PB = CM$. Wykaż, że proste AB, CD i symetralna odcinka PM przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 20 (Baltic-Way–2016) Niech $ABCD$ będzie wypukłym czworokątem takim, że $AB = AD$. Punkt T leży na odcinku AC i jest tak wybrany, że $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Wykaż, że wtedy $AT + AC \geq AB + AD$.