MINI-Akademia na Politechnice Warszawskiej

Okręgi i styczne

Zadania z ćwiczeń

Zadanie 1 W trójkącie ABC punkty E i F są spodkami wysokości opuszczonymi z wierzchołków B i C. Wykaż, że styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie A jest równoległa do prostej EF.

Zadanie 2 Z punktu A leżącego poza okręgiem ω poprowadzono styczne do tego okręgu w punktach B i C. Wykaż, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC i środek okręgu dopisanego do tego trójkąta styczny do boku BC leżą na ω.

Zadanie 3 Wykaż, że okrąg ω przechodzący przez wierzchołki B i C trójkąta ABC oraz przez środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC wycina na bokach AB i AC cięciwy równej długości.

Zadanie 4 Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne wewnętrznie w punkcie M. AB jest cięciwą w większym okręgu styczną do mnieszego okręgu w punkcie T. Wykaż, że MT jest dwusieczną kąta $\angle AMB$.

Zadanie 5 Trzy okręgi o środkach w punktach A, B i C są parami styczne zewnętrznie i posiadają wspólną styczną zewnętrzną. Niech okrąg o środku w C będzie najmniejszym okręgiem. Oznaczmy długości promieni okręgów o środkach w punktach A, B i C przez a, b i c. Wykaż, że

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Zadanie 6 Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach A i B tak, że odcinki styczne do ω_1 w punktach A i B są równe promieniowi okręgu ω_2. Na łuku AB okręgu ω_1 zawartym w ω_2 wybrano punkt C. Niech K i L będą punktami przecięcia prostych AC i BC z ω_2 różnymi od punktu C. Wykaż, że KL jest średnicą ω_2.

Zadanie 7 Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach w punktach O_1 i O_2 i o różnych promieniach są rozłączne zewnętrznie. Wspólna styczna zewnętrzna do tych okręgów przecina wspólną styczną wewnętrzną w punkcie A. Wykaż, że kąt $\angle O_1AO_2$ jest prosty.

Zadanie 8 Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach w punktach O_1 i O_2 i o promieniach długości R i r są rozłączne zewnętrznie. Wspólna styczna wewnętrzna l do tych okręgów przecina wspólne styczne zewnętrzne w punktach A i B. Oznaczmy punkt styczności l z jednym z okręgów przez C. Wykaż, że $AC \cdot CB = rR$.

Zadanie 9 Okręgi ω_1 i ω_2 o promieniach długości $r_1 < r_2$ są styczne zewnętrznie w punkcie A. Znajdź długość odcinka stycznego wyprowadzonego z dowolnego punktu B okręgu ω_1 do okręgu ω_2 w zależności od $AB = a$ r_1 i r_2. Jak zmieni się odpowiedź, gdy ω_1 i ω_2 są styczne wewnętrznie?

Zadanie 10 Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach w punktach O_1 i O_2 i o promieniach różnych długości są rozłączne zewnętrznie. Wykaż, że cztery punkty styczności stycznych zewnętrznych do ω_1 i ω_2 leżą na jednym okręgu, cztery punkty styczności stycznych wewnętrznych do ω_1 i ω_2 leżą na jednym okręgu oraz cztery punkty przecięcia stycznych zewnętrznych ze stycznymi wewnętrznymi do ω_1 i ω_2 leżą na jednym okręgu. Ponadto wykaż, że wszystkie te trzy okręgi są współśrodkowe.

Zadanie 11 Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach w punktach O_1 i O_2 i o promieniach różnych długości są rozłączne zewnętrznie. Niech ω_3 będzie okręgiem stycznym zewnętrznie do ω_1 i ω_2 posiadającym środek na prostej O_1O_2. Wykaż,że ramiona trapezu rónoramiennego wyznaczonego przez punkty przecięcia wspólnych stycznych wewnętrznych do ω_1 i ω_2 z okręgiem ω_3 są równoległe do wspólnych stycznych zewnętrznych do ω_1 i ω_2.

Zadanie 12 Z punktu B leżącego na zewnątrz okręgu ω_1 poprowadzono styczne do ω_1 w punktach A i C. Okrąg ω_2 jest styczny do prostej AC w punkcie C i przechodzi przez punkt B. Niech M będzie punktem wspólnym okręgów ω_1 i ω_2 różnym od C. Wykaż, że prosta AM przechodzi przez środek odcinka BC.

Zadanie 13 Okręgi ω_1 i ω_2 mają promienie różnych długości. Wykaż, że w trapez równoramienny wyznaczony przez cztery punkty styczności wspólnych stycznych zewnętrznych do ω_1 i ω_2 można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy gdy ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie.

Zadanie 14 Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach w punktach O_1 i O_2 są styczne zewnętrznie w punkcie C. Niech AC będzie średnicą ω_1 oraz CB średnicą ω_2. Okrąg ω o średnicy AB jest styczny wewnętrznie do ω_1 i ω_2. Przez punkt C prowadzimy dowolną prostą, która przecina ω_1 w punkcie K, ω_2 w punkcie L i ω w punktach M i N. Wykaż, że $MK = NL$.

Zadanie 15 Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez B przecina ω_1 w punkcie C i ω_2 w punkcie D, gdzie punkty C i D są różne niż B. Styczna do ω_1 w punkcie C przecina się ze styczną do ω_2 w punkcie D w punkcie M. Przez punkt przecięcia prostych AM i CD poprowadzono prostą równoległą do prostej CM. Prosta ta przecina prostą AC w punkcie K. Wykaż, że prosta KB jest styczna do ω_2 w punkcie B.

Zadanie 16 Okrąg ω o średnicy MN jest styczny do prostej l w punkcie N. Na średnicy MN wybrano punkt A i poprowadzono okrąg o środku na prostej l przechodzący przez A. Oznaczmy przez C i D punkty przecięcia tego okręgu z prostą l. Niech P będzie punktem przecięcia prostej MC z ω różnym od punktu M i niech P będzie punktem przecięcia prostej MD z ω różnym od punktu M. Wykaż, że proste PQ przecinają MN w stałym punkcie.