MINI AKADEMIA 11.05.2013
ZADANIA

Logika rachunku zdań

Problem 1. Semantycznie udowodnić, że następujące zdania są tautologiami:

(1) $[(p \wedge (q \wedge r)) \to r] \leftrightarrow [p \to ((q \wedge r) \to r)]$,
(2) $\neg[(\neg p \wedge r) \vee (q \to r)] \leftrightarrow [\neg(\neg p \wedge r) \wedge \neg(q \to r)]$.

Problem 2. Omówić dowód formalny zasady sprzeczności.

Przesłanka: $\mathcal{F} \vdash (G \wedge \neg G)$ Wniosek: $\mathcal{F} \vdash H$

Dowód:

(1) $\mathcal{F} \vdash (G \wedge \neg G)$,
(2) $\mathcal{F} \vdash \neg G$,
(3) $\mathcal{F} \vdash (\neg G \vee H)$
(4) $\mathcal{F} \vdash (G \to H)$
(5) $\mathcal{F} \vdash G$,
(6) $\mathcal{F} \vdash H$.

Problem 3. Używając reguł wnioskowania formalnego dołączonych do treści zadań pokazać, że następujące reguły zachodzą:

Przesłanka	Wniosek	Nazwa zasady
$\{F\} \vdash G \wedge \neg G$	$\varnothing \vdash \neg F$	modus tollens
	$\varnothing \vdash (F \to G) \leftrightarrow (\neg G \to \neg F)$	prawo kontrapozycji

Problem 4. Pokazać dowód formalny $\{(s \vee g) \to p, \neg a, p \to a\} \vdash \neg s$.

Problem 5. Pokazać, że jeśli zdanie A jest tautologią i istnieje dowód formalny, którego ostatnim krokiem jest $A \vdash C$, gdzie C jest pewnym zdaniem, to istnieje dowód formalny, którego ostatnim krokiem jest $\varnothing \vdash C$.

Problem 6. Zrobiła to Ania lub Basia. Basia nie mogła jednocześnie czytać i zrobić tego. Basia czytała. Kto to zrobił?

Problem 7. Dla każdego z następujących zbiorów założeń sformułować wynikający z nich wniosek i podać reguły wnioskowania, z których się korzysta.

(1) Jeśli Internet nie będzie działał, to będę się uczył. Jeśli będę się uczył, to zdam egzamin. Nie zdam egzaminu.
(2) Jeśli zaliczyłem pierwszy i drugi semestr, to zaliczyłem rok. Jeśli zaliczyłem rok, to zaliczyłem drugi semestr. Nie zaliczyłem roku.
(3) Jeśli zaliczyłem pierwszy i drugi semestr, to zaliczyłem rok. Będę studiował na następnym roku tylko wtedy, gdy zaliczę ten rok. Nie będę studiował na następnym roku.

Problem 8. Zapisać każde z poniższych rozumowań za pomocą symboliki RZ, używając sugerowanych nazw zmiennych. Następnie napisać dowód semantyczny.

(1) Jeśli moje obliczenia się zgadzają i zapłacę rachunek za elektryczność, to zabraknie mi pieniędzy. Jeśli nie zapłacę rachunku, to wyłączą mi prąd. Zatem, jeśli nie zabraknie mi pieniędzy i prądu mi nie wyłączą, to moje obliczenia się nie zgadzają. (o,r,z,p)
(2) Jeśli meteorolodzy przewidują, że będzie sucho, to pójdę na wycieczkę lub będę pływać. Pójdę pływać wtedy i tylko wtedy, gdy meteorolodzy podadzą, że będzie ciepło. Zatem, jeśli nie idę na wycieczkę, meteorolodzy przewidują, że będzie mokro lub ciepło. (s,w,p,m)
(3) Jeśli dostanę pracę i będę ciężko pracować, to będę awansować. Jeśli będę awansować, będę zadowolony. Nie będę zadowolony. Zatem albo nie dostanę pracy, albo nie będę ciężko pracować. (p,c,a,z)
(4) Jeśli będę studiował logikę, to będę bardzo mądry. Jeśli będę studiował zarządzanie, to będę zarabiał dużo pieniędzy. Jeśli będę bardzo mądry lub zarabiał dużo pieniędzy, to nie będę nieszczęśliwy. Zatem, jeśli nie jestem nieszczęśliwy, to nie studiowałem logiki i nie studiowałem zarządzania. (sl,m,sz,p,n)

Problem 9. Jeśli jesteś tutaj, to dzisiaj musi być piątek. Jeśli się nie mylę, to dzisiaj jest sobota. Albo dzisiaj, to nie wczoraj, albo dzisiaj jest piątek. Nie mogę się mylić, jeśli jesteś tutaj. Piątek to nie sobota. Jeśli dzisiaj jest sobota, to wczoraj był piątek.

(1) Czy jesteś tutaj?
(2) Przypuśćmy, że się nie mylę. Czy możesz wywnioskować, że wczoraj to nie dzisiaj?
(3) Jeśli się nie mylę, jaki dzień był wczoraj?

Problem 10. Kreska Sheffera jest to spójnik logiczny $\mid$ zdefiniowany za pomocą następującej tabelki:

x	y	$x \mid y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Semantycznie udowodnić, że

(1) $p \mid q \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$
(2) $\neg p \leftrightarrow p \mid p$
(3) $p \vee q \leftrightarrow (p \mid p) \mid (q \mid q)$

Znaleźć zdanie równoważne zdaniu $p \wedge q$ i $p \to q$ w którym występuje tylko kreska Sheffera.

Logika modalna

Przypomnienie: język logiki modalnej, to język zdefiniowany za pomocą zbioru zmiennych Φ, którego elementy będziemy oznaczać najczęściej literami p, q, r oraz następującej zasady tworzenia zdań:

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \to \psi \mid \phi \leftrightarrow \psi \mid \diamond\psi \mid \Box\psi$$

Ponieważ niektóre spójniki logiczne możemy wyrażać za pomocą innych, równoważnie język logiki modalnej możemy wprowadzić używając następującej reguły:

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \diamond\psi$$

W takim przypadku $\Box\psi$ wprowadzamy jako zdanie $\Box\psi := \neg \diamond \neg\psi$.

Problem 11. Zapisać za pomocą formuł logiki modalnej następujące zdania:

(1) jeśli ϕ zachodzi to konieczne jest, aby ϕ było możliwe
(2) co może być konieczne, zachodzi rzeczywiście
(3) jeśli konieczne jest, ze po deszczu pojawia się tęcza, to z konieczności opadu deszczu wynika konieczność pojawienia się tęczy
(4) jeśli coś jest możliwe, to konieczne jest, żeby było możliwe
(5) jesli możliwe, że ϕ jest możliwe, to możliwe jest, że ϕ zachodzi

Problem 12. W różnych odmianach logiki modalnej, operator $\Box$ może być interpretowany inaczej. Np. w *logice dowodliwości* operator $\Box$ jest interpretowany jako *dowodliwość*, tj. mówi nam czy dana formuła może być dowiedziona w pewnej teorii. Biorąc pod uwagę taką interpretację modalności $\Box$ napisać w języku logiki modalnej zdanie

Dowiedzione jest, że jeśli z dowodliwości p wynika prawdziwość p, to p jest udowodnione.

Problem 13. Istnieją logiki modalne o większej liczbie modalności. Na przykład *logika temporalna* definiowana jest nąstępującym językiem

$$\phi = \perp \mid p \mid \phi \vee \psi \mid \neg\phi \mid F\phi \mid P\phi$$

Modalności F oraz P interpretuje się następująco:

- $F\phi$ czytamy jako "ϕ zachodzi w pewnym momencie w przyszłości",
- $P\phi$ czytamy jako "ϕ zaszło w pewnym momencie przeszłości".

Ponadto, definiujemy operatory dualne do powyższych następująco:

- $G\phi := \neg F \neg\phi$
- $H\phi := \neg P \neg\phi$

Jak należy czytać formuły $G\phi$ i $H\phi$? Zapisać w języku logiki temporalnej następujące zdanie:

Cokolwiek się stało, na zawsze się stało.

Co oznacza formuła $F\phi \to FF\phi$?

Problem 14. Niech W będzie zbiorem i $\to \subseteq W \times W$ będzie relacją. *Frejmem* nazywamy parę $(W, \to)$. *Wartościowaniem* frejmu $(W, \to)$ nazywamy funkcję $V : \Phi \to \mathcal{P}(W)$. Innymi słowy zmiennym ze zbioru Φ przyporządkowujemy stany W w których te zmienne *są prawdziwe*. Mając ustalone wartościowanie V możemy zdefiniować prawdziwość formuł w każdym stanie frejmu w następujący sposób:

$$W, w \models \perp \text{ nigdy},$$
$$W, w \models p \text{ dla } p \in \Phi \iff w \in V(p),$$
$$W, w \models \neg p \text{ dla } p \in \Phi \iff \text{ nieprawda, że } W, w \models p,$$
$$W, w \models \phi \vee \psi \iff W, w \models \phi \text{ lub } W, w \models \psi,$$
$$W, w \models \diamond\phi \iff \text{ istnieje } v \in W \text{ takie, że } w \to v \text{ oraz } W, v \models \phi.$$

Przykład 1. Niech $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Przykładem frejmu jest następujący graf:

$$\begin{tikzcd} w_1 \arrow[r] \arrow[d] & w_2 \arrow[dl] \\ w_3 \arrow[loop right] & \end{tikzcd}$$

Rozważmy wartościowanie $V : \Phi \to \mathcal{P}(W)$, takie, że $V(w_1) = \varnothing$, $V(w_1) = \{p, q\}$, $V(w_3) = \{q, s\}$.

Uzupełnić pięć reguł prawdziwości przedstawionych powyżej o reguły dla spójników występujących w bogatszym języku logiki modalnej przedstawionym na początku tego rozdziału.

Problem 15. Sprawdzić, czy w powyższym przykładzie zachodzą

- $W, w_1 \models \neg p \wedge \neg q \wedge \neg s$,
- $W, w_1 \models \diamond p$,
- $W, w_2 \models p \wedge \diamond q$,
- $W, w_3 \models q \wedge s \wedge \diamond s$

Problem 16. Mówimy, że formuła ϕ logiki modalnej jest *spełniona* we frejmie W is piszemy $W \models \phi$, jeśli dla każdej waluacji V i każdego stanu $w \in W$ zachodzi $W, w \models \phi$. Jakie strukturalne własności posiadają frejmy dla których

- $W \models \Box p \to p$
- $W \models \diamond \diamond p \to \diamond p$

Reguły wnioskowania dla rachunku zdań

Przesłanka	Wniosek	Nazwa zasady
$G \in \mathcal{F}$	$\mathcal{F} \vdash G$	założenie
$\mathcal{F} \vdash G$ i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$	$\mathcal{F}' \vdash G$	monotoniczność
$\mathcal{F} \vdash G$	$\mathcal{F} \vdash \neg\neg G$	podwójna negacja
$\mathcal{F} \vdash G_1$, $\mathcal{F} \vdash G_2$	$\mathcal{F} \vdash (G_1 \wedge G_2)$	$\wedge$-wprowadzenie
$\mathcal{F} \vdash (G_1 \wedge G_2)$	$\mathcal{F} \vdash G_1$, $\mathcal{F} \vdash G_2$	$\wedge$-eliminacja
$\mathcal{F} \vdash (G_1 \wedge G_2)$	$\mathcal{F} \vdash (G_2 \wedge G_1)$	$\wedge$-symetria
$\mathcal{F} \vdash G_1$	$\mathcal{F} \vdash (G_1 \vee G_2)$	$\vee$-wprowadzenie
$\mathcal{F} \vdash (G_1 \vee G_2)$, $\mathcal{F} \cup \{G_1\} \vdash H, \mathcal{F} \cup \{G_2\} \vdash H$	$\mathcal{F} \vdash H$	$\vee -$ eliminacja
$\mathcal{F} \vdash (G_1 \vee G_2)$	$\mathcal{F} \vdash (G_2 \vee G_1)$	$\vee$-symetria
$\mathcal{F} \cup \{F\} \vdash G$	$\mathcal{F} \vdash (F \to G)$	$\to$-wprowadzenie
$\mathcal{F} \vdash (F \to G), \mathcal{F} \vdash F$	$\mathcal{F} \vdash G$	$\to$-eliminacja
$\mathcal{F} \vdash F$	$\mathcal{F} \vdash (F)$	()-wprowadzenie
$\mathcal{F} \vdash (F)$	$\mathcal{F} \vdash F$	()-eliminacja
$\mathcal{F} \vdash (F \vee G) \vee H$	$\mathcal{F} \vdash F \vee (G \vee H)$	$\vee$-nawiasowanie
$\mathcal{F} \vdash (F \wedge G) \wedge H$	$\mathcal{F} \vdash F \wedge (G \wedge H)$	$\wedge$-nawiasowanie

Zasada	Nazwa zasady
$\mathcal{F} \vdash (F \vee G)$ wtw $\mathcal{F} \vdash \neg(\neg F \wedge \neg G)$	$\vee -$ definicja
$\mathcal{F} \vdash (F \to G)$ wtw $\mathcal{F} \vdash (\neg F \vee G)$	$\to -$ definicja
$\mathcal{F} \vdash (F \leftrightarrow G)$ wtw $\mathcal{F} \vdash (F \to G)$ i $\mathcal{F} \vdash (G \to F)$	$\leftrightarrow -$ definicja