MiNI Akademia Matematyki na Politechnice Warszawskiej

Krzysztof Chełmiński

Od OMJ do IMO - zadania olimpijskie z geometrii

MiNI PW, 12.10.2019

Zadanie 1 – OMJ 2019

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC Załóżmy, że na odcinku CD istnieje taki punkt E, że

$$\angle EAD = \angle AED \quad oraz \quad \angle ECB = \angle CEB\,.$$

Wykaż, że $AC + BC > AB + CE$.

Rozwiązanie

Z założenia trójkąty AED oraz CEB są równoramienne. Stąd $AD = DE$ oraz $BC = BE$. Na prostej AB oznaczmy przez P taki punkkt, że $AP = CE$ oraz A leży na odcinku DP.
Zauważamy, że wtedy $DP = AD + AP = DE + CE = CD$. Ponadto z założenia $AD = DE$ co daje, że trójkąty EDP i ADC są przystające. Stąd otrzymujemy

$$AC + BC = PE + EB > PB = PA + AB = CE + AB\,.$$

Zadanie 2 – OM 2018

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Punkty E i F są spodkami jego wysokości poprowadzonymi odpowiednio z wierzchołków B i C.Prosta styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie P. Prosta równoległa do prostej BC przechodząca przez punkt A przecina prostą EF w punkcie Q. Wykazać, że prosta PQ jest prostopadła do środkowej trójkąta opuszczonej z wierzchołka A.

Rozwiązanie

Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez ω. Zauważamy, że na czworokącie $EFBC$ można opisać okrąg (kąty przy wierzchołkach E i F są proste i środek okręgu to środek odcinka BC), który oznaczamy przez ω_1. Ponadto

$$\angle EFA = \pi - \angle BFE = \angle ACB = \angle EAQ\,.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wnioskujemy, że okrąg ω_2 opisany na trójkącie AFE jest styczny do prostej AQ.

Stąd wnioskujemy, że

$$AQ^2 = \mathrm{Pot}(Q, \omega_2) = QE \cdot QF = \mathrm{Pot}(Q, \omega_1)\,.$$

Ponadto AQ^2 jest potęgą punktu Q względem zdegenerowanego okręgu ω_0 o środku w punkcie A i promieniu równym zero.

Ponadto mamy

$$PA^2 = \mathrm{Pot}(P,\omega) = PB \cdot PC = \mathrm{Pot}(P,\omega_1)\,.$$

Jednakże PA^2 jest potęgą punktu P względem ω_0. Więc P i Q leżą na prostej potęgowej ω_1 i ω_0 co daje tezę.

Zadanie 3 – IMO 2018

Niech Γ będzie okręgiem opisanym na trójkącie ostrokątnym ABC. Na bokach AB i AC wybrano punkty D i E takie, że $AD = AE$. Symetralne odcinków BD i CE przecinają krótsze łuki AB i AC odpowiednio w punktach F i G. Wykaż, że proste DE i FG są równoległe.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez Z i T punkty przecięcia boków AB i AC z prostą FG. Niech X będzie punktem takim, że czworokąt $FXAD$ jest równoległobokiem. Wtedy otrzymujemy

$$\angle FXA = \angle FDA = \pi - \angle FDB = \pi - \angle FBD$$

co oznacza, że na czworokącie $FXAB$ można opisać okrąg i w konsekwencji X leży na Γ. Podobnie definiujemy Y jako taki punkt, że czworokąt $GYAE$ jest równoległobokiem i wnioskujemy, że Y leży na Γ.

Ponadto mamy następujące równości

$$XF = AD = AE = YG\,.$$

Więc czworokąt $XFGY$ jest równoramiennym trapezem wpisanym w Γ. Ten wniosek prowadzi do równości kątów

$$\angle ATZ = \angle YGF = \angle XFG = \angle AZT$$

i trójkąt AZT jest równoramienny co kończy to rozwiązanie.

Zadanie 4 – Baltic-Way 2018

Okręgi ω_1 i ω_2 są zewnętrznie rozłączne. Odcinki A_1B_1 oraz A_2B_2 są średnicami tych okręgów, które nie są równoległe. Oznaczmy przez A środek odcinka A_1A_2, przez B środek odcinka B_1B_2 oraz przez C punkt przecięcia odcinków A_1A_2 oraz B_1B_2. Wykaż, że ortocentrum trójkąta ABC leży na pewnej prostej niezależnej od wyboru średnic ω_1 i ω_2.

Rozwiązanie

Wykażemy, że ortocentrum trójkąta ABC leże na prostej potęgowej okręgów ω_1 i ω_2. Oznaczmy przez X_1 i X_2 punkty przecięcia A_1A_2 odpowiednio z okręgami ω_1 i ω_2. Podobnie niech Y_1 i Y_2 to punkty przecięcia B_1B_2 odpowiednio z okręgami ω_1 i ω_2. Zauważamy, że proste A_1Y_1 oraz A_2Y_2 są równoległe oraz proste B_1X_1 oraz B_2X_2 są równoległe. Te cztery proste tworzą równoległobok $KLMN$.
Oznaczmy środek KL przez P. Wtedy prosta BP jest równoległa do prostej LM gdyż trójkąty prostokątne Y_2B_1K i Y_2B_2L są podobne oraz trójkąt prostokątny BPY_2 jest do nich podobny. Więc prosta PB jest prostopadła do A_1A_2 czyli do AC. Podobnie oznaczając przez Q środek odcinka KN wnioskujemy, że prosta QA zawiera wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka A. Razem mamy, że ortocentrum H trójkąta ABC to środek równoległoboku $KLMN$.

Na czworokącie $B_1X_1Y_2A_2$ można opisać okrąg oznaczany przez ω. Widzimy, że K leży na prostej potęgowej ω_1 i ω_2 gdyż

$$\mathrm{Pot}(K, \omega_1) = \mathrm{Pot}(K, \omega) = \mathrm{Pot}(K, \omega_2)\,.$$

Ponadto z podobieństwa trójkątów prostokątnych MA_1X_2 i MY_1B_2

$$MY_1 \cdot MA_1 = MX_2 \cdot MB_2$$

i punkt M też leży na prostej potęgowej ω_1 i ω_2 co natychmiast kończy to rozwiązanie.