MiNI Akademia Matematyki na Politechnice Warszawskiej

Krzysztof Chełmiński

Potęga punktu względem okręgu

MiNI PW, 8.10.2016

Definicja

Na płaszczyźnie dany jest okrąg ω o środku O i promieniu $r > 0$ oraz punkt P. Potęgą punktu P względem ω nazywamy liczbę

$$\mathrm{pot}\,(P, \omega) = PO^2 - r^2\,.$$

Uwaga

Dla P leżących na zewnątrz ω wartość potęgi jest dodatnia oraz dla P leżących wewnątrz ω wartość potęgi jest ujemna. Gdy P jest punktem z ω to $\mathrm{pot}\,(P, \omega) = 0$.

Wniosek

Niepusty zbiór punktów o jednakowej potędze względem ω to zawsze okrąg o środku w punkcie O.

Twierdzenie 1 (o siecznych)

Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg ω w punktach A i B. Wtedy wartość iloczynu $PA \cdot PB$ jest równa $|\mathrm{pot}\,(P, \omega)|$.

Dowód Niech P leży na zewnątrz ω. Narysujmy inną prostą przechodzącą przez P i przecinającą ω w punktach C i D. Wówczas

$$\Delta PDA \sim \Delta PBC \quad \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD \,.$$

Niech teraz druga prosta przechodzącą przez P będzie styczna do ω w E. Wtedy

$$\Delta PEA \sim \Delta PBE \quad \Rightarrow PA \cdot PB = PE^2 = \mathrm{pot}\,(P, \omega) \,.$$

Dowód gdy P jest punktem wewnętrznym jest bardzo podobny.

Twierdzenie 2 (odwrotne do tw. o siecznych)

a) Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie P. Jeżeli $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ to punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.

b) Punkty P, A, B leżą w tej kolejności na prostej. Ponadto punkty P, C, D leżą w tej kolejności na innej prostej. Jeżeli $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ to punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.

c) Punkty P, A, B leżą w tej kolejności na prostej k. Punkt E nie należy do k oraz $PA \cdot PB = PE^2$. Wtedy okrąg opisany na punktach A, B, E jest styczny do k w E.

Dowód a) Niech okrąg ω opisany na ΔABC przecina prostą CP w punkcie D' (innym niż C). Chcemy aby $D = D'$.

$$-\mathrm{pot}\,(P, \omega) = PC \cdot PD' = PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad \Rightarrow PD' = PD\,.$$

Punkty D i D' leżą po tej samej stronie P więc $D = D'$.

b) dowód jest identyczny

c) odwrócenie rozumowania z twierdzenia 1.

Zadanie

Na płaszczyźnie dany jest okrąg ω i dwa różne punkty A, B leżące wewnątrz tego okręgu. Znajdź okrąg styczny wewnętrznie do ω przechodzący przez A i B.

Rozwiązanie

Rysujemy dowolny okrąg przechodzący przez A, B i przecinający ω w dwóch innych punktach C, D i taki aby proste AB i CD nie były równoległe. Niech M będzie punktem przecięcia prostej AB i prostej CD. Prowadzimy prostą styczną do ω z M i niech Q będzie punktem styczności. Wtedy okrąg opisany na trójkącie ABQ jest poszukiwanym okręgiem.

Twierdzenie 3 (o prostej potęgowej)

Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi ω_1 o środku O_1 i promieniu $r_1 > 0$ oraz ω_2 o środku O_2 i promieniu $r_2 > 0$. Niech $O_1 \neq O_2$. Wtedy zbiór punktów P takich, że

$$\mathrm{pot}\,(P, \omega_1) = \mathrm{pot}\,(P, \omega_2)$$

jest prostą prostopadłą do prostej O_1O_2.

Dowód Niech P będzie punktem takim, że $\mathrm{pot}\,(P, \omega_1) = \mathrm{pot}\,(P, \omega_2)$. Oznaczmy przez $\tilde{P}$ rzut prostokątny P na prostą O_1O_2. Wtedy

$$\mathrm{pot}\,(\tilde{P}, \omega_1) = \tilde{P}O_1^2 - r_1^2 = PO_1^2 - P\tilde{P}^2 - r_1^2 = PO_2^2 - P\tilde{P}^2 - r_2^2 = \tilde{P}O_2^2 - r_2^2 = \mathrm{pot}\,(\tilde{P}, \omega_2)\,.$$

Nietrudno sprawdzić, że na prostej O_1O_2 jest tylko jeden punkt o powyższej własności.

Niech teraz k będzie prostą prostopadłą do prostej O_1O_2 przechodzącą przez P oraz niech $Q \in k$. Wtedy rzut prostokątny Q na O_1O_2 to $\tilde{P}$. Więc

$$\mathrm{pot}\,(Q, \omega_1) = QO_1^2 - r_1^2 = Q\tilde{P}^2 + \tilde{P}O_1^2 - r_1^2 = Q\tilde{P}^2 + \tilde{P}O_2^2 - r_2^2 = QO_2^2 - r_2^2 = \mathrm{pot}\,(Q, \omega_2)\,.$$

Jeżeli $R \notin k$ to rzut R na O_1O_2 jest inny niż $\tilde{P}$ i dlatego $\mathrm{pot}\,(R, \omega_1) \neq \mathrm{pot}\,(R, \omega_2)$.

Uwaga Opisana w twierdzeniu 3 prosta nazywa się prostą potęgową lub osią potęgową ω_1 i ω_2.

Twierdzenie 4

Punkty A , B , D , C leżą w tej kolejności na okręgu ω. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P oraz proste AD i BC przecinają się w punkcie Q. Wtedy

$$\mathrm{pot}\,(P,\omega)+\mathrm{pot}\,(Q,\omega)=PQ^2\,.$$

Dowód Niech okrąg opisany na trójkącie ACP przecina QP w punkcie S. Wtedy punkty Q , S , C , D leżą na jednym okręgu. Więc

$$\mathrm{pot}\,(P,\omega)+\mathrm{pot}\,(Q,\omega)=PC\cdot PD+QA\cdot QC=PS\cdot PQ+QS\cdot QP=PQ^2\,.$$

Uwaga Zamieniając miejscami punkty C i D otrzymujemy inną konfigurację. W tej nowej sytuacji teza twierdzenia 4 pozostaje prawdziwa. Dowód tej uwagi jest podobny do dowodu twierdzenia 4.

Twierdzenie 5

Z punktu S leżącego na zewnątrz okręgu ω poprowadzono styczne SK i SL do ω w punktach K i L. Przez S poprowadzono dwie sieczne przecinające ω w punktach A, C oraz B, D. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P oraz proste AD i BC w punkcie R. Wtedy punkty K, L, P, R leżą na jednej prostej.

Dowód Niech ω_1 będzie okręgiem o środku w S i promieniu SK. Z twierdzenia 4 $\mathrm{pot}\,(P,\omega) + \mathrm{pot}\,(S,\omega) = PS^2$. Stąd otrzymujemy

$$\mathrm{pot}\,(P,\omega) = PS^2 - SK^2 = \mathrm{pot}\,(P,\omega_1)\,.$$

Oznacza to, że P leży na prostej potęgowej ω i ω_1, czyli na prostej KL.

Podobnie dla punktu R mamy

$$\mathrm{pot}\,(R,\omega) + \mathrm{pot}\,(S,\omega) = RS^2 \quad \Rightarrow \mathrm{pot}\,(R,\omega) = RS^2 - SK^2 = \mathrm{pot}\,(R,\omega_1)\,,$$

co oznacza, że R leży na prostej KL.