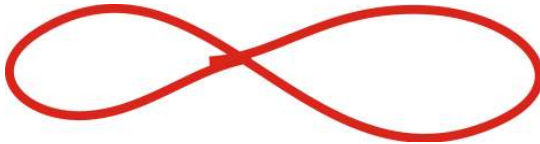


MiNI-Akademia – 2011.05.07.

NIESKOŃCZONOŚĆ



NIESKOŃCZONY, NIESKOŃCZENIE

????????????????

Tadeusz Rzeżuchowski

Co to jest nieskończoność?

- 1 Czy wiemy o czym chcemy mówić?
- 2 Co to miałyby być nieskończoność?
- 3 I czy istnieje?

Dlaczego nieskończoność przyciąga uwagę,
intryguje?

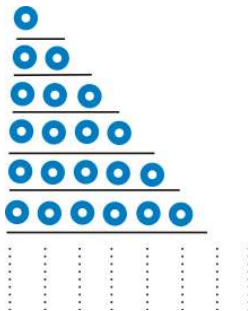
Byłoby wskazane, ażeby filozof przyrody zbadał zagadnienie nieskończoności, a mianowicie czy istnieje, czy nie, a jeżeli istnieje, to czym jest.

- 1 Czy istnieją zbiory nieskończone?
- 2 Jeśli tak, to czy można ich nieskończoności porównywać, czy wszystkie są takie same, czy bywają różne?
- 3 Czy w świecie fizycznym istnieją jakieś nieskończoności? Czy jeśli pojawiają się w rachunkach fizyków, to jest tylko wynik niedokładnego modelu?

- 1 Czy istnieje coś, co uważalibyśmy za nieskończenie małe?
- 2 Czy odcinek można dzielić na coraz mniejsze części i czy tak można robić "w nieskończoność"?
- 3 Co to znaczy, że czas składa się z chwil?

- ❶ Czy można dodać do siebie nieskończenie wiele liczb?
- ❷ Co by to miało znaczyć i jak to robić?
- ❸ Czy takie dodawanie ma takie same własności jak zwykłe dodawanie w arytmetyce?

Nieskończoność potencjalna



Istnieją zbiory o dowolnie dużej liczbie elementów, ale zawsze skończone.

Nie ma zbiorów nieskończonych.

Nie ma największej liczby naturalnej, ale nie ma sensu mówić o wszystkich naraz jako o zbiorze.



Istnieją zbiory, które zawierają nieskończenie wiele elementów.

Można mówić o zbiorze liczb naturalnych w całości, to znaczy zawierającym nieskończenie wielu elementów.

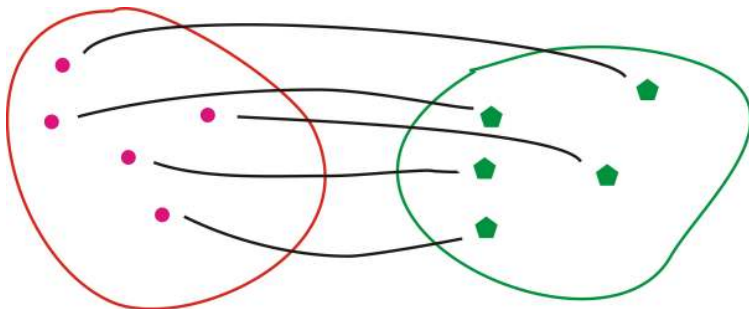


Odkrył świat nieskończoności.

Twórca teorii mnogości.

Dwa zbiory są równoliczne, jeśli można połączyć w pary elementy jednego z elementami drugiego.

Zbiory równoliczne - równej mocy



Zbiory są równoliczne, o ile istnieje połączenie ich elementów w pary takie, że każdy element jednego zbioru jest dokładnie w jednej parze z elementem drugiego zbioru.

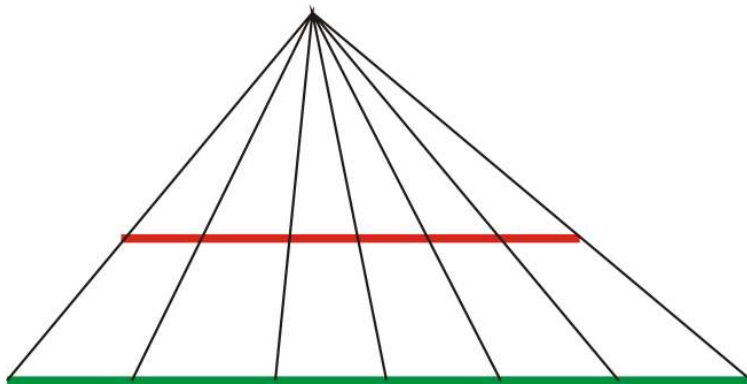
Pozornie paradoksalne konsekwencje.

1	2	3	4	5	6	...
2	4	6	8	10	12	...

Równoliczność zbioru liczb naturalnych i zbioru liczb parzystych.

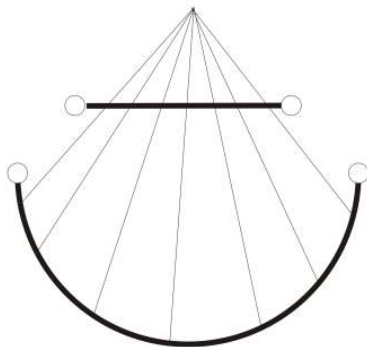
Równoliczność dla zbiorów nieskończonych

Pozornie paradoksalne konsekwencje.



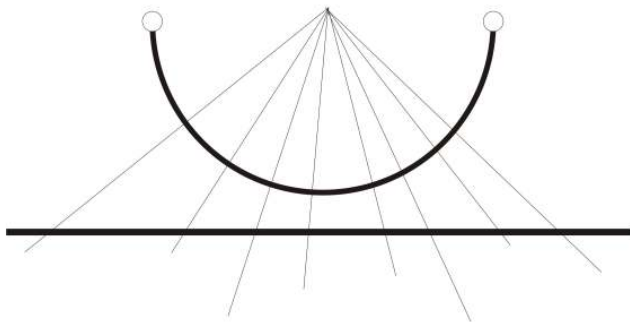
Równoliczność odcinków różnej długości.

Równoliczność dla zbiorów nieskończonych



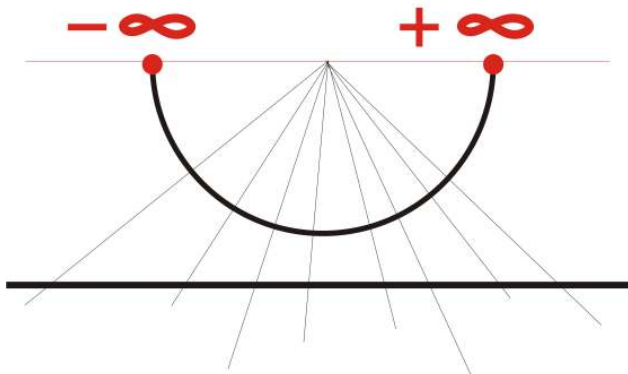
Równoliczność półokręgu i odcinka.

Równoliczność dla zbiorów nieskończonych

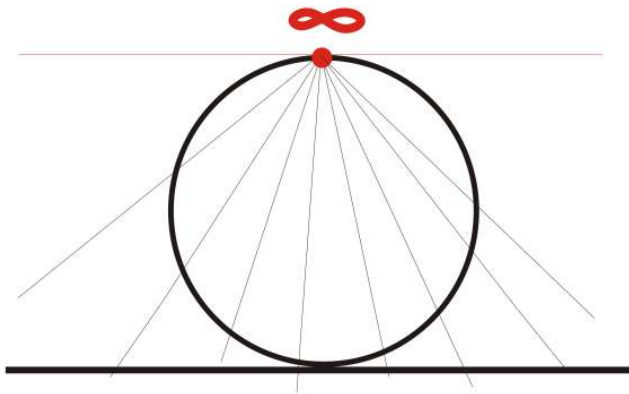


Równoliczność odcinka i prostej.

Zobaczyć nieskończoność



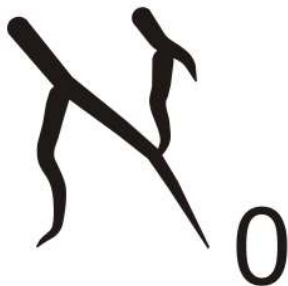
Zobaczyć nieskończoność inaczej



Nieskończoność jako "ilość" elementów zbioru

Moc zbioru

Moc zbioru liczb naturalnych.

A large, stylized black symbol representing the cardinal number Aleph Zero. It consists of a large 'N' with a diagonal line through it, followed by a zero.

ALEF ZERO

Moc zbioru liczb rzeczywistych jest większa niż moc zbioru liczb naturalnych

Jeśli a^i jest ciągiem liczb rzeczywistych z przedziału $(0, 1)$ oraz dla $i = 1, 2, 3, \dots$

$$a^i = 0, a_1^i a_2^i a_3^i a_4^i \dots$$

są ich rozwinięciami dziesiętnymi, wtedy liczba

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$$

gdzie

$$x_i = 5, \text{ jeśli } a_i^i \neq 5$$

$$x_i = 6, \text{ jeśli } a_i^i = 5$$

nie jest żadną z liczb a^i .

Metoda przekątniowa Cantora

0,5 6 5 5 6

0,7 3 5 4 3 5 4 2 1 0 0 7 5

0,3 5 4 7 2 1 5 4 0 9 8 9 3

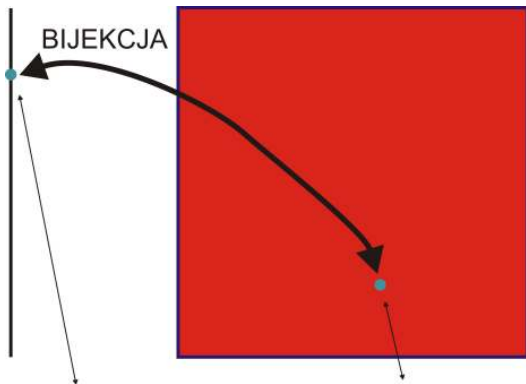
0,9 1 3 5 6 7 8 2 2 1 0 0 3

0,5 5 3 4 2 1 1 1 2 6 5 0 3

0 7 7 4 0 5 1 5 5 6 2 1 0 0

.

Kwadrat zawiera tyle samo punktów co odcinek



$$f(0, q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 \dots) = (0, q_1 q_3 q_5 \dots ; 0, q_2 q_4 q_6 \dots)$$

Nie ma największej nieskończoności

Rodzina $P(X)$ wszystkich podzbiorów zbioru X ma większą moc niż zbiór X .

Jeśli

$$F : X \rightarrow P(X)$$

jest dowolną funkcją, to podzbiór

$$A = \{x \in X : x \notin F(x)\}$$

nie jest wartością funkcji F dla żadnego argumentu ze zbioru X .

Nie ma największej nieskończoności

$$\mathbb{N}, \quad P(\mathbb{N}), \quad P(P(\mathbb{N})), \quad P(P(P(\mathbb{N}))), \dots$$

Teoria mnogości Cantora to obłąd, z którego matematyka kiedyś się wyleczy.

Z rajskiego ogrodu nieskończoności, którego wrota uchylił Cantor, nikt nie może nas wygnać.

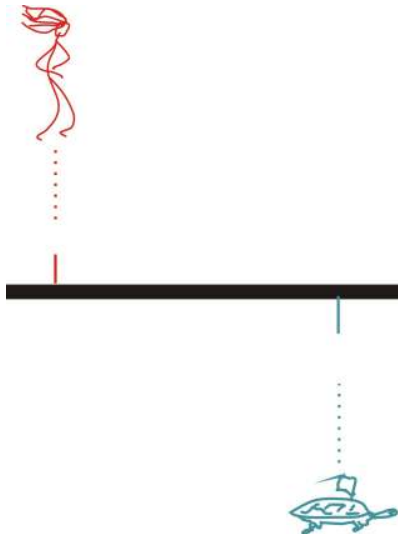
Jeśli wpatrujesz się zbyt długo w otchłań,
otchłań zacznie spoglądać na ciebie.

Co by to miało znaczyć, że coś jest nieskończenie małe?

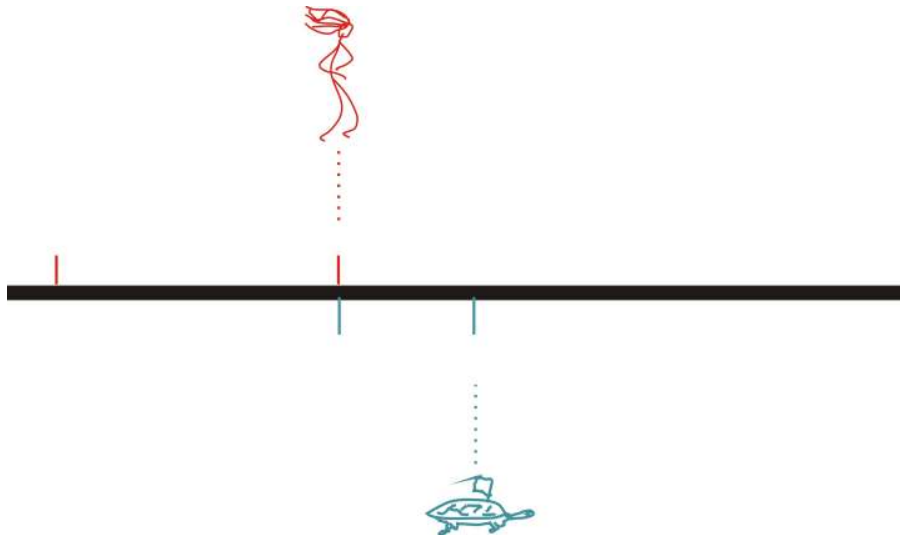
Czy jest coś tak nieskończenie małego, że jeszcze jest, ale dalej się tego nie da podzielić, zmniejszyć?

Od dawna jest dla mnie oczywiste, że najdrobniejsze szczegóły są nieskończenie ważne.

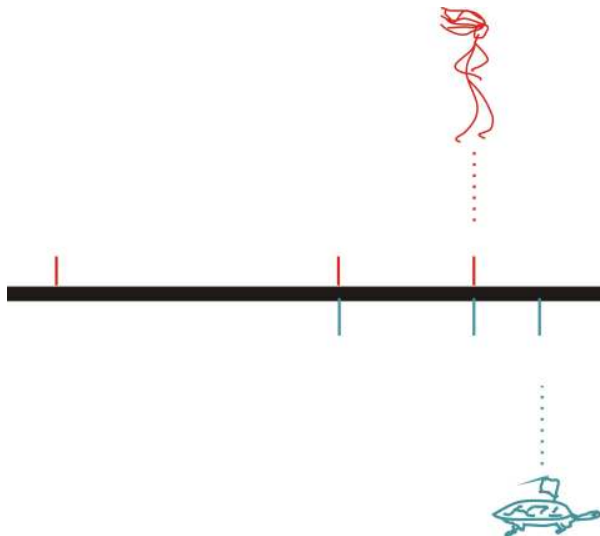
Achilles i żółw



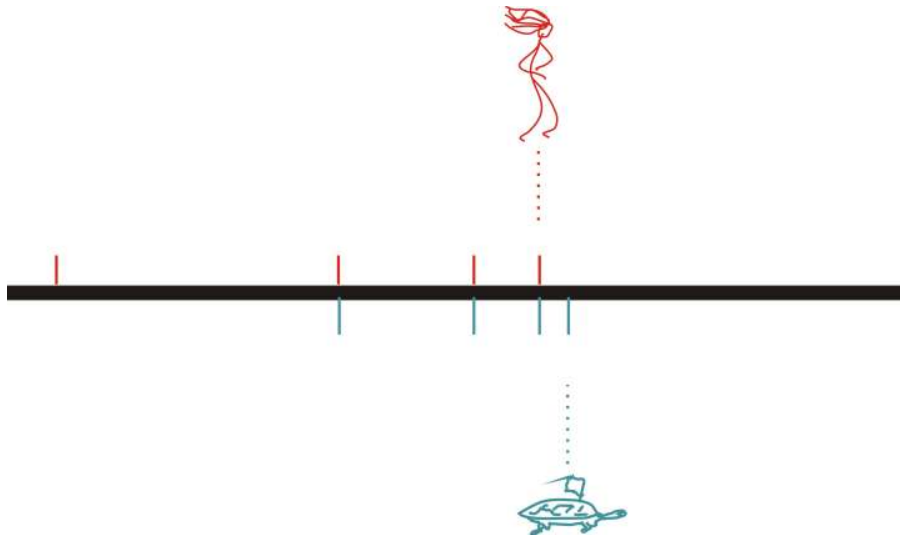
Achilles i żółw



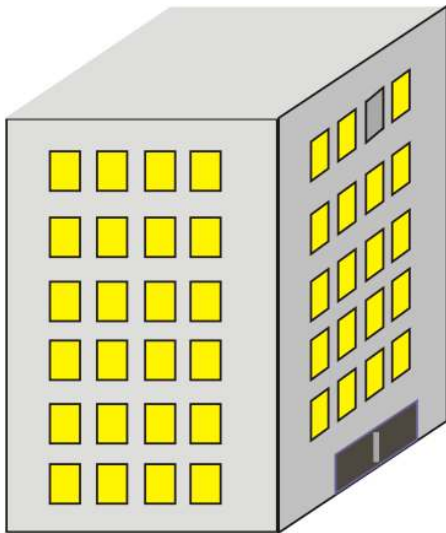
Achilles i żółw



Achilles i żółw

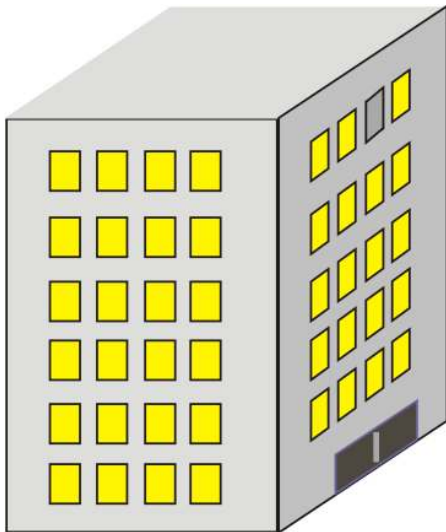


Jeszcze daleko

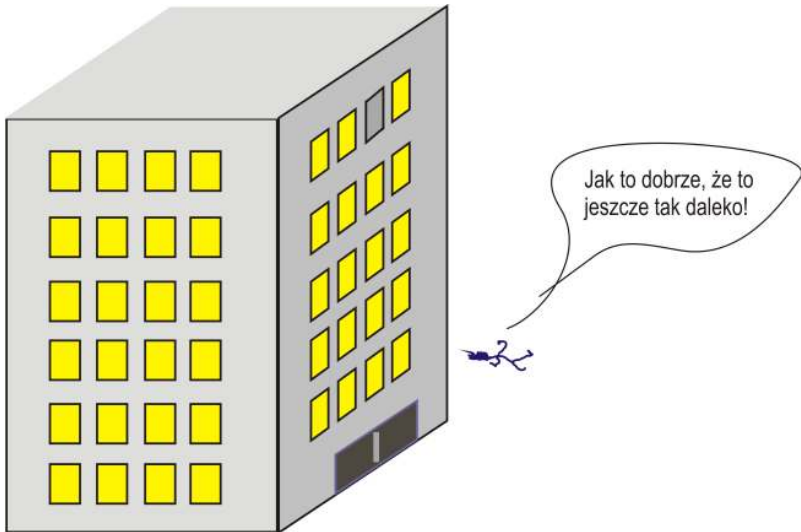


Jak to dobrze, że to
jeszcze tak daleko!

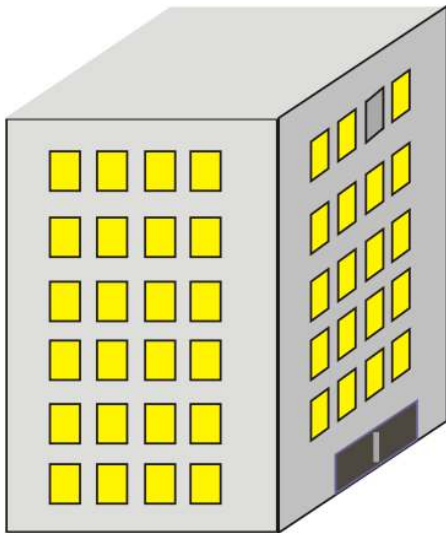
Jeszcze daleko



Jeszcze daleko



Jeszcze daleko



No, gdyby nie ta
kupa piachu!!!

Strzała Zenona z Elei



Strzała Zenona z Elei



Strzała Zenona z Elei



Strzała Zenona z Elei



Czy można dodawać nieskończenie wiele liczb?

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Jeśli $|q| < 1$ i n rośnie "do nieskończoności", to ta suma jest coraz bliższa liczby

$$\frac{1}{1 - q}$$

Czy można dodawać nieskończenie wiele liczb?

Dowolny ciąg liczb $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$

$$x_1$$

$$x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3$$

$$\dots$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

$$\dots$$

Jeśli różnica $S - (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$ zmierza do zera, gdy n zmierza do nieskończoności, to liczbę S uważamy za sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Jaki powinien być ciąg, żeby suma jego elementów istniała?

$$S - (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}) \rightarrow 0$$

$$S - (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n) \rightarrow 0$$

więc różnica wyrażeń po lewej stronie też zmierza do zera:

$$x_n \rightarrow 0$$

Jeśli suma nieskończona istnieje, to ciąg wyrazów tej sumy musi być zbieżny do zera.

Czy zbieżność do zera ciągu składników wystarcza, żeby suma nieskończona istniała?

Czy zbieżność do zera ciągu składników wystarcza, żeby suma nieskończona istniała?

NIE!

Zbieżność do zera ciągu składników nie wystarcza, żeby suma istniała

$$1$$

$$1 + \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\vdots$$



$$+ \infty$$

Czy da się przejść nad nieskończenie szeroką przepaścią?

Jak ułożyć nieskończenie długi most z belek nie łącząc ich w żaden sposób, tylko układając?

Czy da się przejść nad nieskończenie szeroką przepaścią?



Czy da się przejść nad nieskończenie szeroką przepaścią?



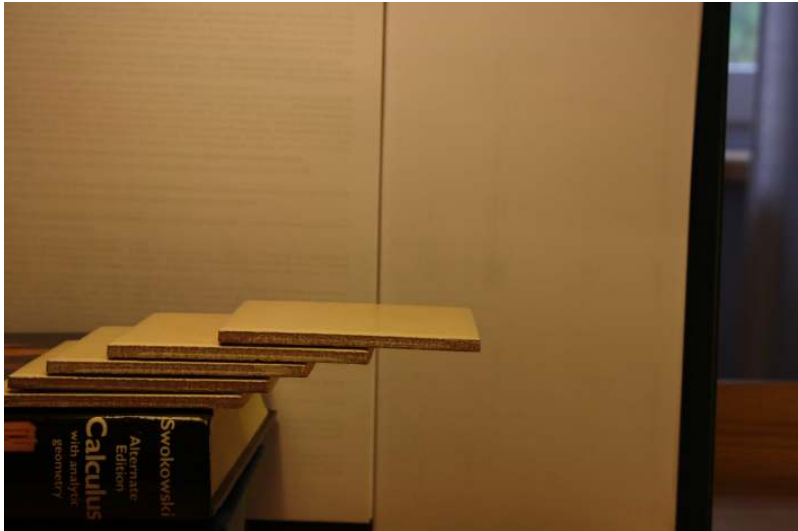
Czy da się przejść nad nieskończenie szeroką przepaścią?



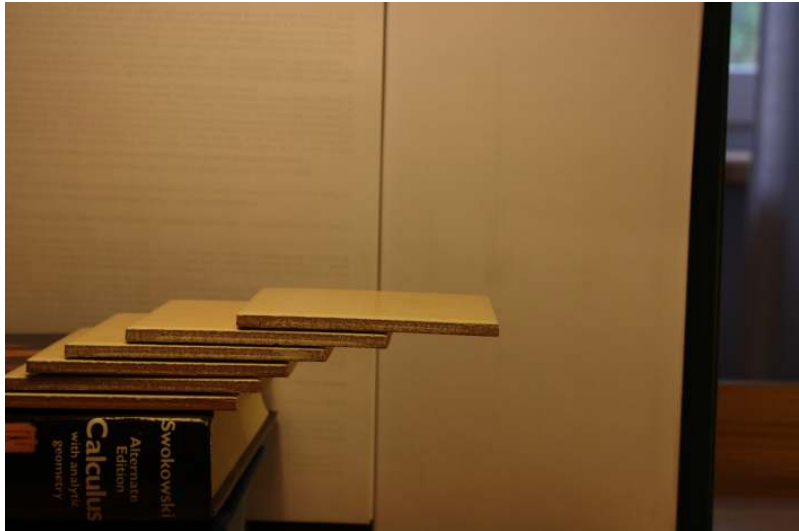
Czy da się przejść nad nieskończenie szeroką przepaścią?



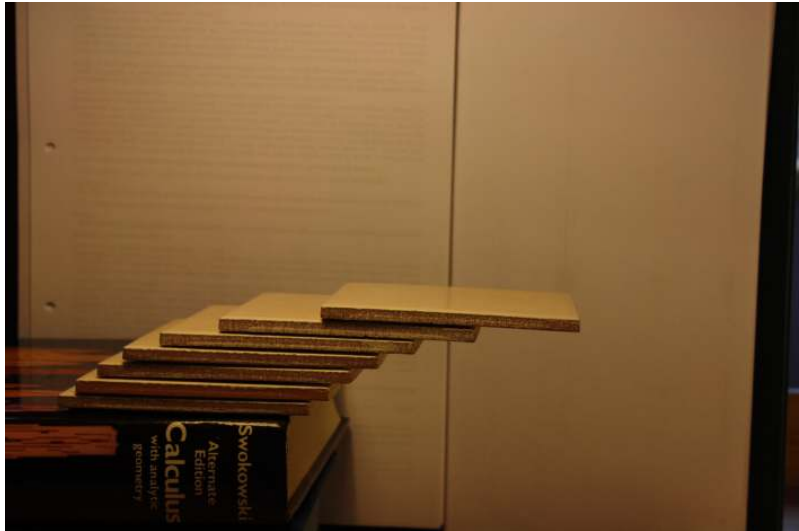
Czy da się przejść nad nieskończenie szeroką przepaścią?



Czy da się przejść nad nieskończenie szeroką przepaścią?



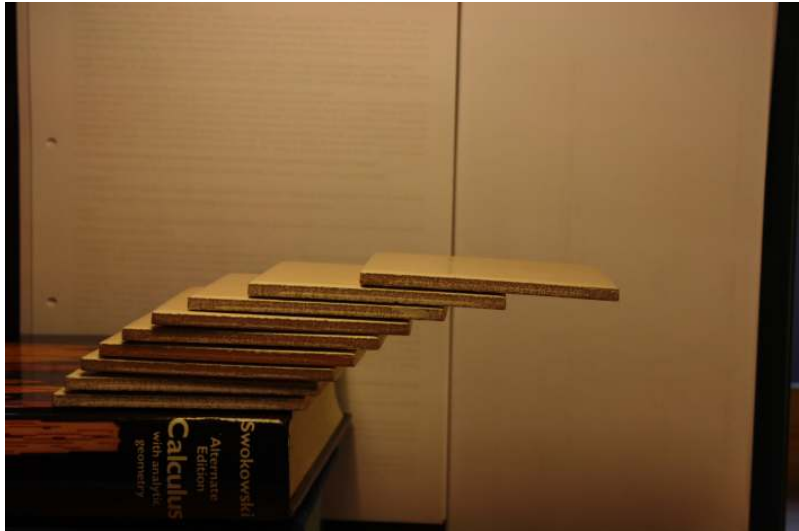
Czy da się przejść nad nieskończenie szeroką przepaścią?



Czy da się przejść nad nieskończenie szeroką przepaścią?



Czy da się przejść nad nieskończenie szeroką przepaścią?



Czy da się przejść nad nieskończenie szeroką przepaścią?

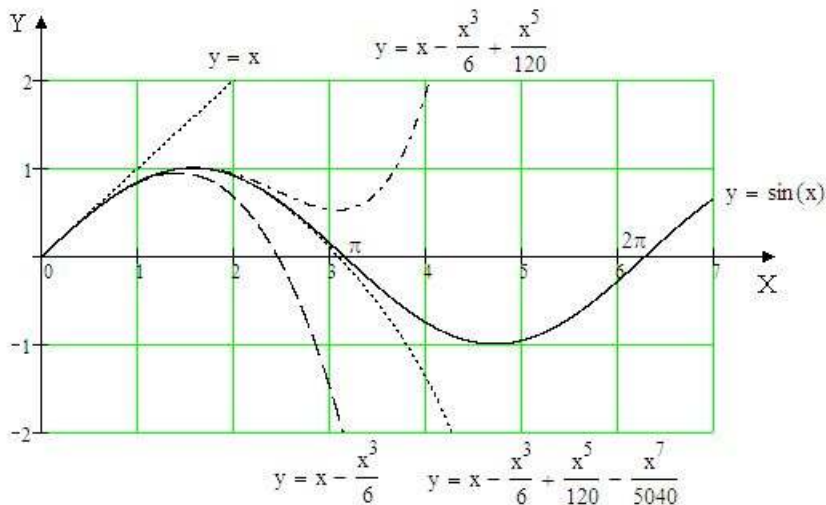
Można tak sięgnąć dowolnie daleko.

Czy nieskończone dodawanie jest zawsze przemienne?

Czy nieskończone dodawanie jest zawsze łączne?

Czy tylko dla liczb można mówić o nieskończonym dodawaniu?

Nieskończone dodawanie funkcji bardzo się przydaje.



Nasza wiedza może być tylko skończona, za to niewiedza pozostanie zawsze nieskończona.

O nieskończoności i nieskończonym
można by mówić
w nieskończoność.

Ale to już koniec.

Dziękuję!