Wzór Bayesa

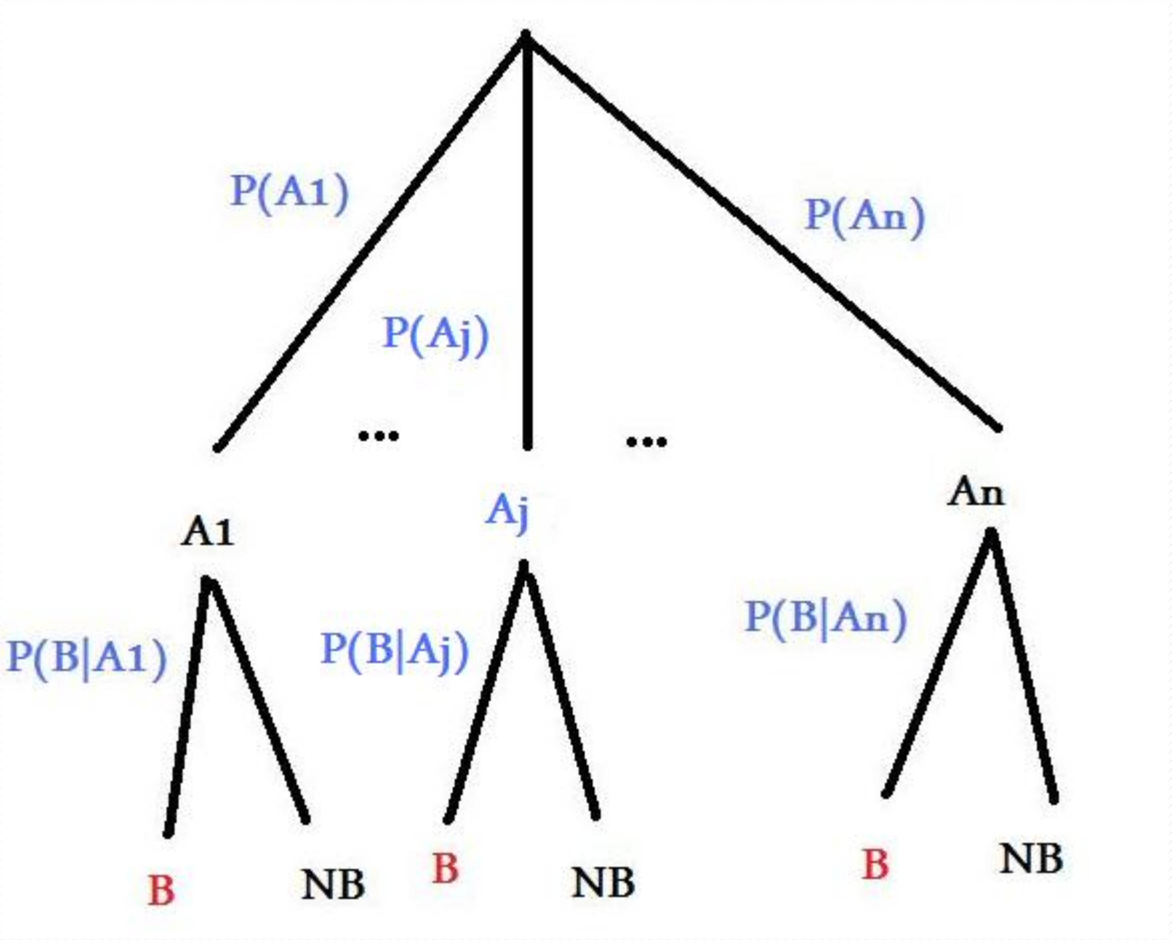
Jeśli zdarzenie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tworzą zupełny układ zdarzeń, to dla dowolnego zdarzenia B i dowolnej przyczyny Aj:

$$P(Aj|B) = \frac{P(Aj \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(Aj) * P(B|Aj)}{P(A1) * P(B|A1) + \cdots + P(Aj) * P(B|Aj) + \cdots + P(An) * P(B|An)}$$

(o ile oczywiście $P(B) \neq 0$)

Jak to działa ?



Przykład

Są dwie urny. W pierwszej jest 5 kur białych i 3 czarne a w drugiej 3 białe i 6 czarnych. Z losowo wybranej urny wybrano jedną kurę. Okazało się, że jest czarna. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, ze została wybrana z pierwszej urny ?

Przykład

Są dwie urny. W pierwszej jest 5 kur białych i 3 czarne a w drugiej 3 białe i 6 czarnych. Z losowo wybranej urny wybrano jedną kurę. Okazało się, że jest czarna. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, ze została wybrana z pierwszej urny ?

Przyczyny:

U1 –wylosowano kurę z pierwszej urny P(U1)=1/2

U2 – wylosowano kurę z drugiej urny P(U2)=1/2

Skutki:

B – wylosowano kurę białą P(B|U1)=5/8 P(B|U2)=3/9

C - wylosowano kurę czarną P(C|U1)=3/8 P(C|U2)=6/9

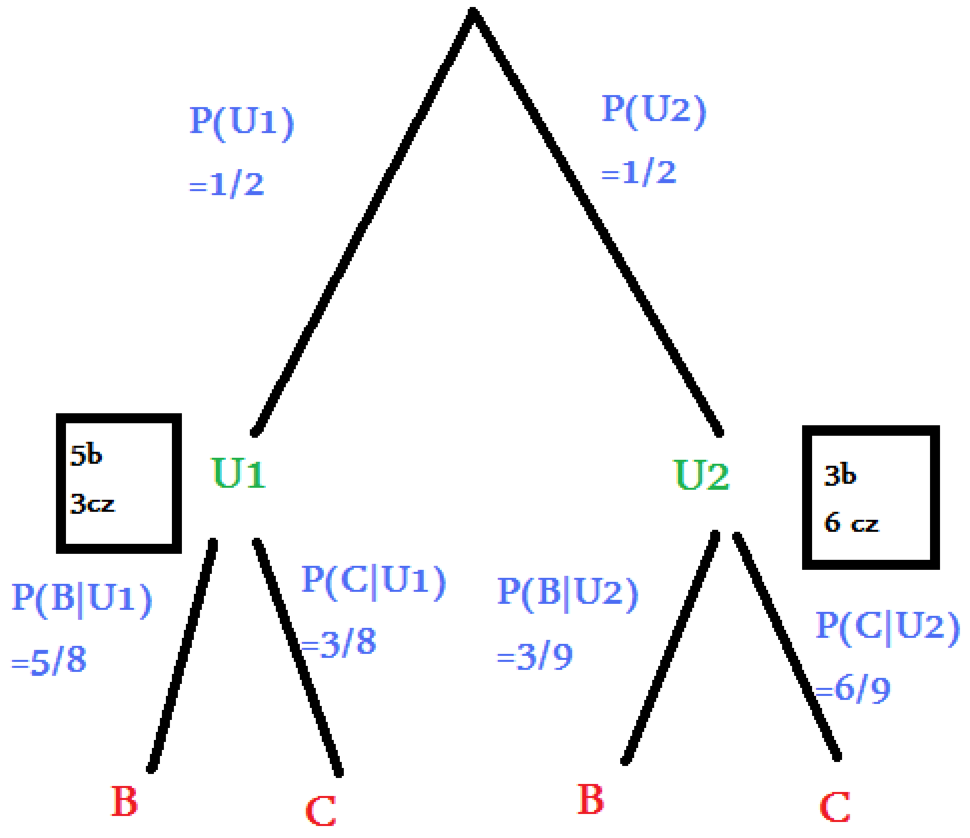
Przykład

Są dwie urny. W pierwszej jest 5 kur białych i 3 czarne a w drugiej 3 białe i 6 czarnych. Z losowo wybranej urny wybrano jedną kurę. Okazało się, że jest czarna. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że została wybrana z drugiej urny ?

Mamy obliczyć $P(U2|C)$

zatem korzystamy z wzoru Bayesa.

Przykład



$$P(U2|C)=\frac{P(U2\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{2}*\frac{6}{9}}{\frac{1}{2}*\frac{3}{8}+\frac{1}{2}*\frac{6}{9}}=\frac{16}{25}$$

Paradoks Monty Halla

Kim był Monty Hall, człowiek, który zasłynął w rachunku prawdopodobieństwa ?

Paradoks Monty Halla

Kim był Monty Hall, człowiek, który zasłynął w rachunku prawdopodobieństwa ?

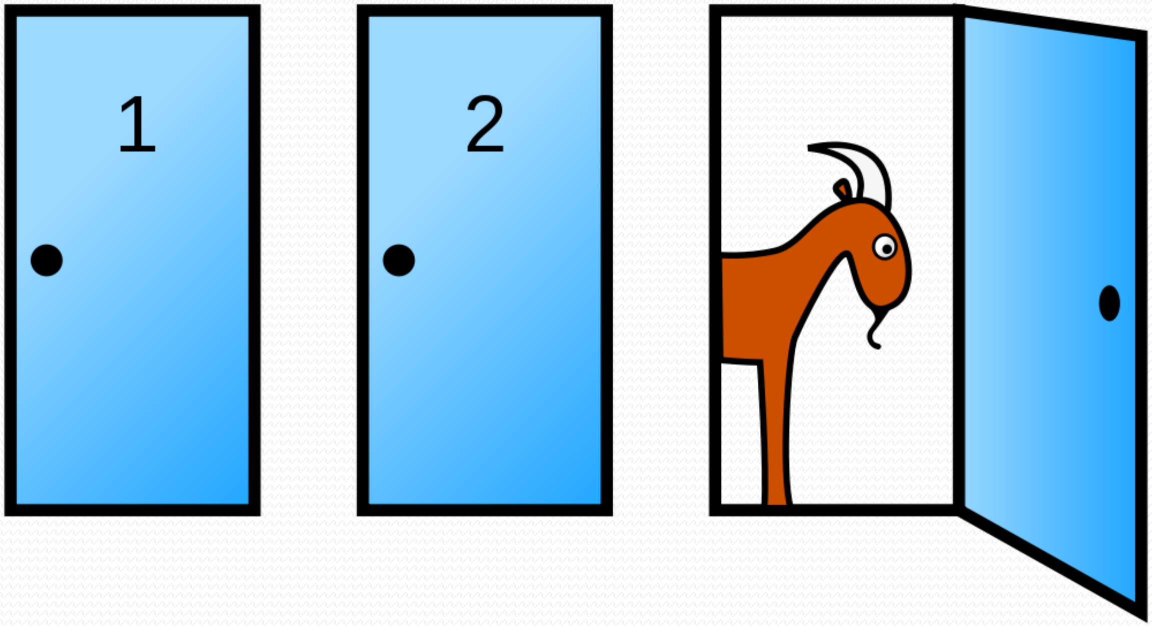
Monty Hall –

(właściwie Maurice Halprin, po polsku Zygmunt Chajzer)

- był prowadzącym program „Let's make a deal” (w wersji polskiej „Idź na całość”)

Paradoks Monty Halla

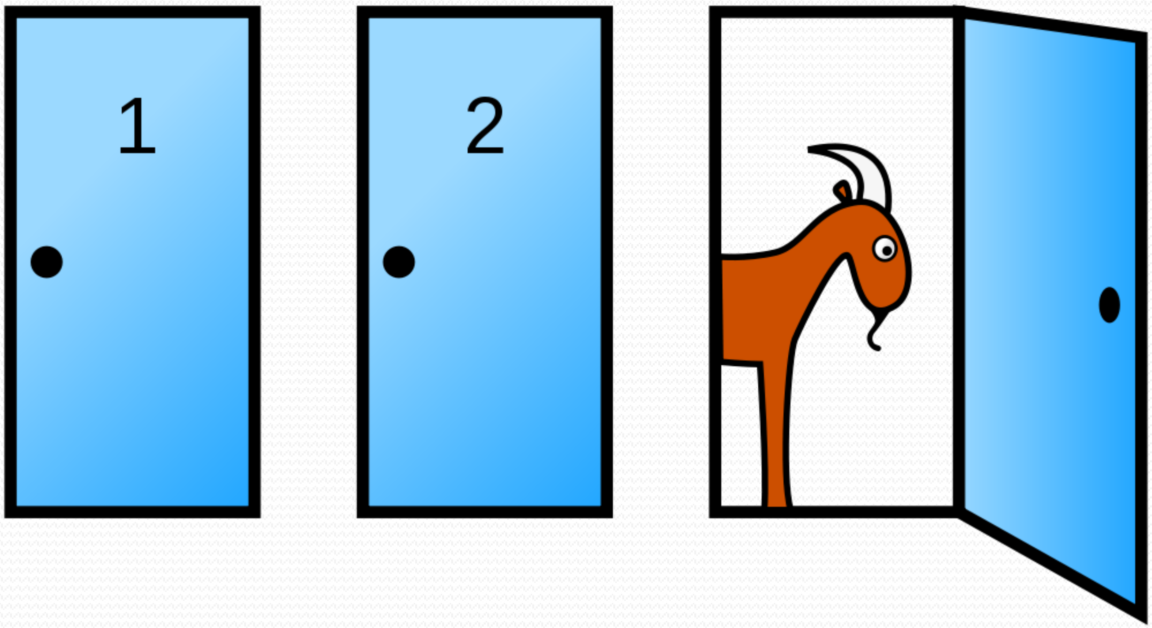
Zawodnik stoi przed trzema bramkami.
Za jedną z nich jest nagroda (samochód), za dwoma pozostałymi nie ma nic ciekawego (ewentualnie są kozy, koty itp.)



Paradoks Monty Halla

Zawodnik wybiera jedną bramkę. Wtedy prowadzący odsłania jedną z bramek za którymi nie ma nagrody.

Następnie pyta się zawodnika czy chce zmienić swój wybór. Co powinien zrobić zawodnik ?



Paradoks Monty Halla

Zostały dwie bramki. Prawdopodobieństwo, że za wybraną bramką jest nagroda wynosi ½ zatem można nie zmieniać początkowego wyboru……….

A może lepiej nie słuchać intuicji ? ☺

Historia paradoksu Monty Halla

Pytanie o to co powinien zrobić gracz zadano w 1990 roku Marilyn vos Savant, prowadzącej kącik porad czasopiśmie „Parade”, osobie o współczynniku IQ wynoszącym 228 (ówczesny rekord Guinessa).

Marilyn odpowiedziała, że gracz powinien zmienić wybraną bramkę bo prawdopodobieństwo tego, że nagroda jest za drugą, niewybraną, bramką wynosi 2/3

I się zaczęło…

Historia paradoksu Monty Halla

Do redakcji „Parade” nadeszlo około 10 tysięcy listów w tej sprawie, autorzy około 1000 listów mieli co najmniej stopień naukowy doktora.

92% autorów listów uważało, że Marilyn nie ma racji i się skompromitowała wypowiadając się na temat, o którym nie ma pojęcia …

Ale

Pokażemy za chwilę, że skompromitowali się Ci, którzy atakowali Marilyn za Jej ignorancję.

Marilyn miała rację !!!

Można to potwierdzić empirycznie.

Przy okazji okazało się, że gołębie lepiej radzą sobie z tym zadaniem niż ludzie. Pierwszego dnia testów zarówno ludzie jak i gołębie zmieniali bramkę w ok. 33% przypadków. Po miesiącu gołębie niemal w 100% przypadków zmieniały bramkę. U ludzi, po miesiącu testów, odsetek zmieniających bramkę spadł !!

No to jak to zadanie rozwiązać ?

Wystarczy zastosować wzór Bayesa. Oznaczmy bramki A,B,C.

Dla ustalenia uwagi załóżmy, że gracz wybrał bramkę A a prowadzący pokazał, że za bramką C nie ma nagrody.

Przyczyny:

NA – nagroda za bramką A, $P(A)=1/3$

NB – nagroda za bramką B, $P(B)=1/3$

NC – nagroda za bramką C, $P(C)=1/3$

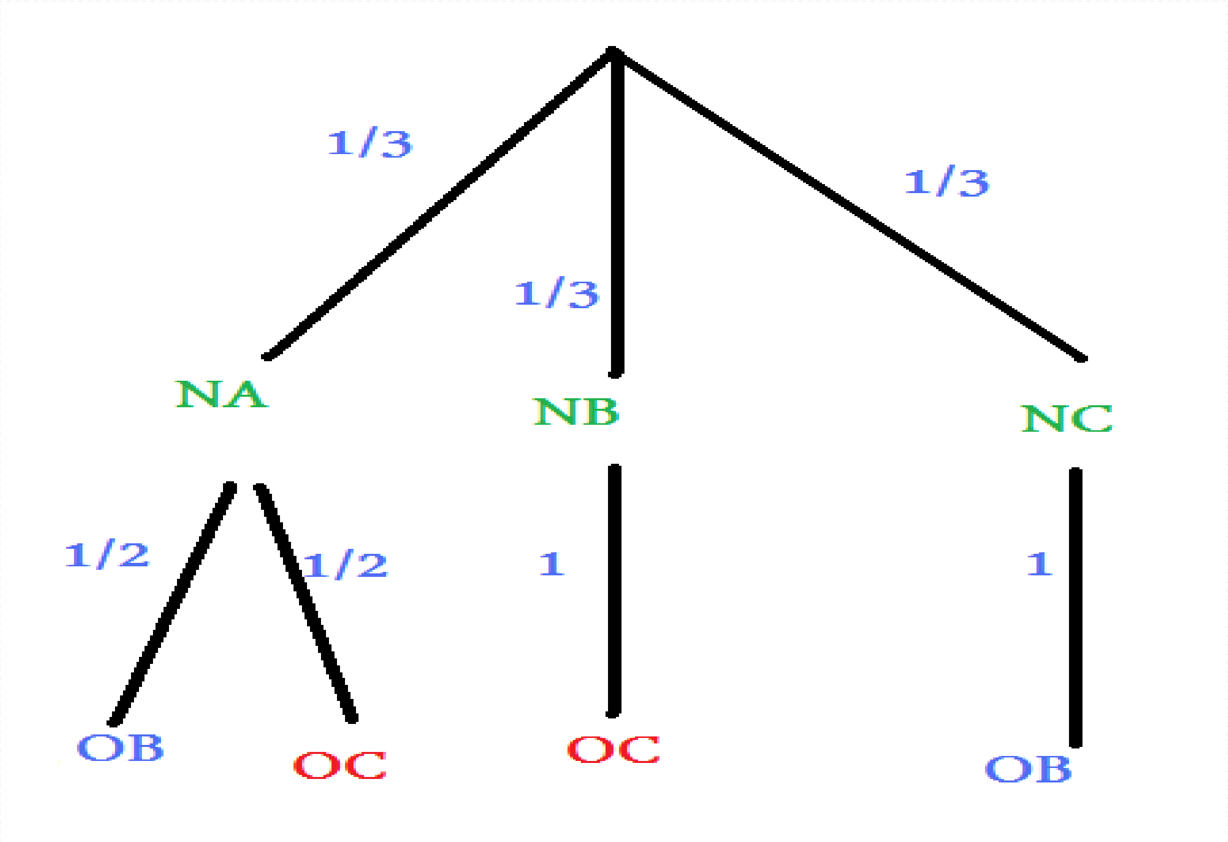
Skutki:

OB – prowadzący otworzył B, $P(OB|NA)=1/2$, $P(OB|NC)=1$

OC – prowadzący otworzył C, $P(OC|NA)=1/2$, $P(OC|NB)=1$

Mamy obliczyć $P(NB|OC)$

A tak



$$P(NB|OC) = \frac{\frac{1}{3} * 1}{\frac{1}{3} * 1 + \frac{1}{3} * \frac{1}{2}} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

To już jest koniec

Wnioski :

1. Gołębie i ludzie posługujący się wzorem Bayesa nie ulegają złudzeniom wywoływanym przez ich „niezawodną” intuicję !! ☺
2. Ludzie niezbyt dobrze posługujący się rachunkiem prawdopodobieństwa mogą skompromitować się w oczach gołębi !! ☺

Intuicja – Wiedza

1 : 2

KONIEC MECZU