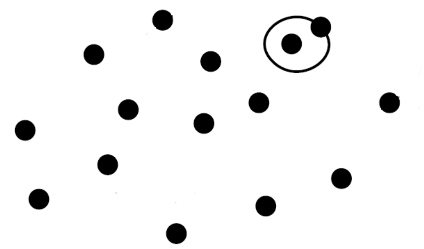
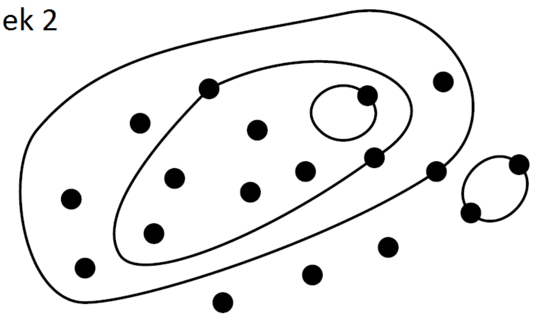
Na płaszczyźnie zaznaczono 15 punktów. Alicja i Bartek naprzemiennie rysują zamknięte krzywe w taki sposób, aby nie przecinały poprzednio narysowanych krzywych i przechodziły przez jeden lub dwa punkty. Gracz, który nie może wykonać ruchu przegrywa. Alicja jako pierwsza wykonała ruch i narysowała krzywą przechodzącą przez jeden punkt i otaczającą inny (patrz rysunek 1).

Rysunek 1

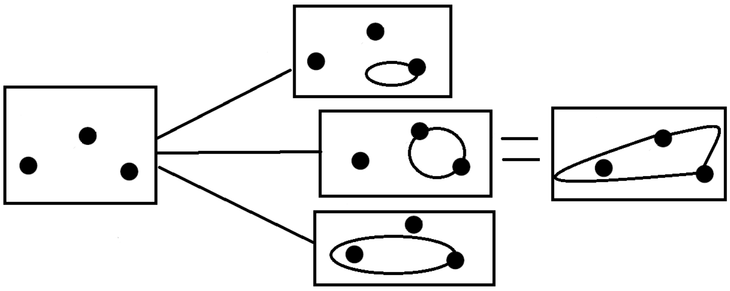


Czy Bartek znów przegra (o ile Alicja będzie grała optymalnie)? Alicja i Bartek postanawiają zagrać po raz kolejny, zaczynając od 18 punktów. Tym razem zaczyna Bartek. Po czterech ruchach sytuacja wygląda tak jak na rysunku 2. Kto wygra, jeśli od tej pory obaj gracze grają optymalnie?

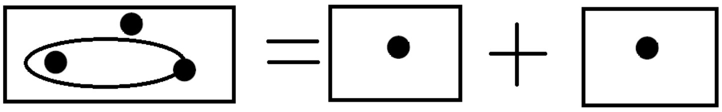
Rysunek 2



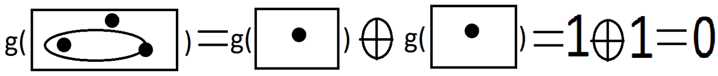
Dowód. Na początek policzymy $g(n)$ czyli wartości NIM pozycji (wartości funkcji Sprague-Grundy'ego), które składają się z n punktów i nie zawierają żadnych pętli dla wszystkich $n \leqslant 13$. Oczywiście $g(0) = 0$. Z pozycji składającej się z 1 punktu można dojść jedynie do pozycji bez wolnych punktów, rysując jedną pętlę. Czyli $g(1) = \mathbf{mex}\{g(0)\} = \mathbf{mex}\{0\} = 1$. Punkt nazywam wolnym jeśli nie przechodzi przez niego żadna pętla. Z pozycji składającej się z dwóch punktów, można wykonać ruch do pozycji składającej się z 1 lub 0 wolnych punktów. Czyli $g(2) = \mathbf{mex}\{g(1), g(0)\} = \mathbf{mex}\{0, 1\} = 2$. Ciekawiej wygląda sytuacja gdy mamy 3 punkty. Wtedy najlepiej opisuje sytuację następujący rysunek, który pokazuje nam wszystkie możliwe ruchy:



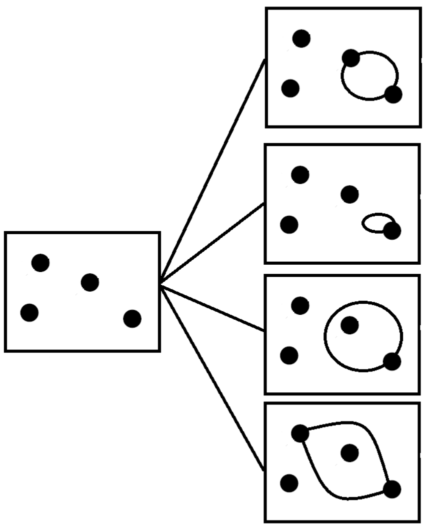
Spójrzmy na pozycję gdzie dwa wolne punkty są rozdzielone pętlą. Jest to oczywiście suma dwóch gier, z których każda to punkt na płaszczyźnie bez pętli, tak jak na rysunku poniżej:



Z twierdzenia Sprague-Grundy'ego:



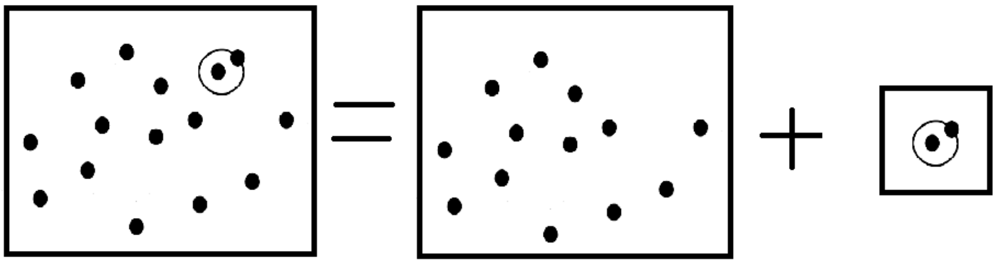
Czyli $g(3) = \mathbf{mex}\{g(1), g(2), g(1) \oplus g(1)\} = \mathbf{mex}\{0, 1, 2\} = 3$. W analogiczny sposób możemy otrzymać $g(4)$. Wszystkie możliwe ruchy wyglądają w następujący sposób:



Czyli $g(4) = \mathbf{mex}\{g(2), g(3), g(1) \oplus g(2), g(1) \oplus g(1)\}$ To zaś możemy obliczyć na podstawie poprzednich wartości NIM, czyli $g(4) = \mathbf{mex}\{0, 2, 3\} = 1$. Rozumując podobnie można uzupełnić tabelkę:

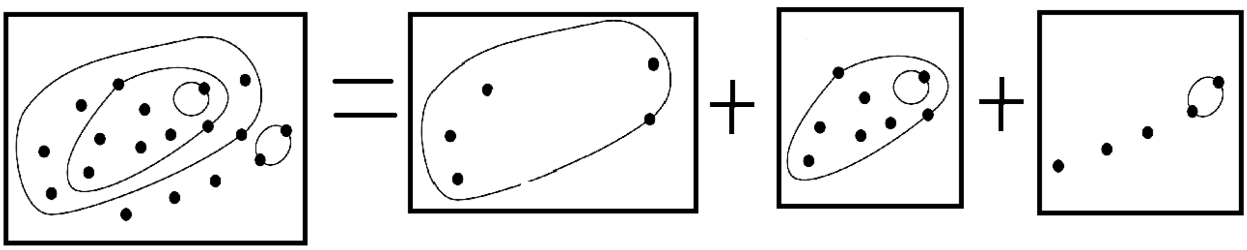
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$g(n)$	1	2	3	1	4	3	2	1	4	2	6	4	1

Teraz jesteśmy gotowi aby odpowiedzieć na pytania postawione w treści zadania. W pierwszej sytuacji pozycja jest sumą gier, co pokazuje rysunek:



Zatem na podstawie wartości tabelki i twierdzenia Sprague-Grundy'ego wartość NIM tej pozycji wynosi $g(13) \oplus g(1) = 1 \oplus 1 = 0$, czyli pozycja jest P pozycją co oznacza, że Alicja wykonała ruch do pozycji porządanej i jeśli tylko będzie grała optymalnie, to Bartek przegra.

Rozważmy teraz pozycję z drugiego pytania. Nietrudno ją przedstawić jako sumę 3 gier, których wartości NIM odczytamy z tabelki.



Korzystając z twierdzenia Sprague-Grundy'ego wartość NIM powyższej pozycji wynosi $g(4) \oplus g(5) \oplus g(3) = 1 \oplus 4 \oplus 3 = 6$. Zatem pozycja ta jest N pozycją, czyli gracz który wykonuje z niej ruch wygrywa. Oznacza to, że tym razem wygra Bartek, o ile będzie grał optymalnie. $\square$