

Automaty komórkowe

Tomasz Brengos

MiNI Akademia

02.12.2017

Spis treści

1 Mathfigs

- **Paradoks więźniów**
- Batman i Zagadka 1000 beczek
- Automaty komórkowe...?

2 Wstęp

- Ogólnie zasady

3 Automaty jednowymiarowe

- Podstawowe definicje
- Reguła 90
- Reguła 184
- Reguła 30
- Reguła 110
- Inne reguły

4 Automaty dwuwymiarowe

- Definicja
- Game of life

Paradoks więźniów



Youtube: **Mathfigs paradoks więźniów**

Paradoks więźniów



Youtube: **Mathfigs paradoks więźniów**

Spis treści

1 Mathfigs

- Paradoks więźniów
- **Batman i Zagadka 1000 beczek**
- Automaty komórkowe...?

2 Wstęp

- Ogólnie zasady

3 Automaty jednowymiarowe

- Podstawowe definicje
- Reguła 90
- Reguła 184
- Reguła 30
- Reguła 110
- Inne reguły

4 Automaty dwuwymiarowe

- Definicja
- Game of life

Batman i zagadka 1000 beczek



Youtube: **Mathfigs zagadka batman**

Batman i zagadka 1000 beczek



Youtube: **Mathfigs zagadka batman**

Spis treści

1 Mathfigs

- Paradoks więźniów
- Batman i Zagadka 1000 beczek
- Automaty komórkowe...?

2 Wstęp

- Ogólnie zasady

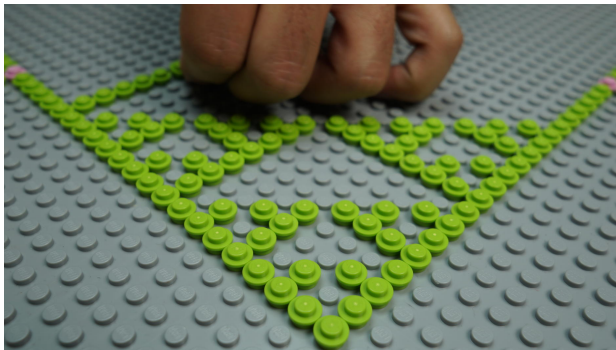
3 Automaty jednowymiarowe

- Podstawowe definicje
- Reguła 90
- Reguła 184
- Reguła 30
- Reguła 110
- Inne reguły

4 Automaty dwuwymiarowe

- Definicja
- Game of life

Mathfigs i automaty komórkowe...?



Spis treści

1 Mathfigs

- Paradoks więźniów
- Batman i Zagadka 1000 beczek
- Automaty komórkowe...?

2 Wstęp

- Ogólnie zasady

3 Automaty jednowymiarowe

- Podstawowe definicje
- Reguła 90
- Reguła 184
- Reguła 30
- Reguła 110
- Inne reguły

4 Automaty dwuwymiarowe

- Definicja
- Game of life

Czym są automaty komórkowe?

- układ sąsiadujących ze sobą komórek,
- każda komórka jest się w jednym z kilku możliwych stanów,
- stan każdej z komórek zmienia się w czasie.



Podstawowe zasady automatów komórkowych

- *jednorodność*: wszystkie komórki uaktualniane na podstawie tych samych reguł,
- *jednoczesność*: wszystkie komórki uaktualniane są jednocześnie,
- *lokalność*: reguły są lokalne z natury.

Spis treści

- 1 Mathfigs
 - Paradoks więźniów
 - Batman i Zagadka 1000 beczek
 - Automaty komórkowe...?
- 2 Wstęp
 - Ogólnie zasady
- 3 Automaty jednowymiarowe
 - Podstawowe definicje
 - Reguła 90
 - Reguła 184
 - Reguła 30
 - Reguła 110
 - Inne reguły
- 4 Automaty dwuwymiarowe
 - Definicja
 - Game of life

Co to jest automat komórkowy jednowymiarowy?

Założenia

Nasze komórki ustawione są na nieskończonej w obie strony taśmie. Każda komórka może być w jednym z dwóch stanów: 0 lub 1.

Niech $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

Definicja

Automatem jednowymiarowym nazywamy dowolną funkcję $F : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

Dla dowolnej trójki liczb $a, b, c \in \{0, 1\}$ podajemy

$$F(a, b, c) = ?$$

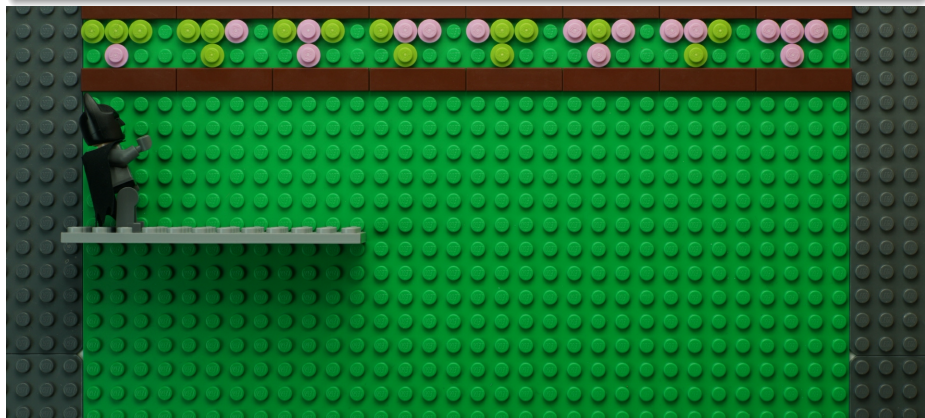
Spis treści

- 1 Mathfigs
 - Paradoks więźniów
 - Batman i Zagadka 1000 beczek
 - Automaty komórkowe...?
- 2 Wstęp
 - Ogólnie zasady
- 3 Automaty jednowymiarowe
 - Podstawowe definicje
 - **Reguła 90**
 - Reguła 184
 - Reguła 30
 - Reguła 110
 - Inne reguły
- 4 Automaty dwuwymiarowe
 - Definicja
 - Game of life

Definicja reguły 90

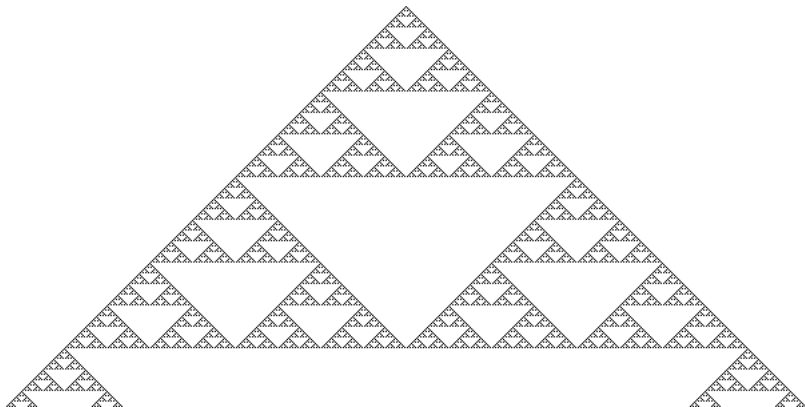
Reguła 90

$$F(a, b, c) = (a + c) \bmod 2$$

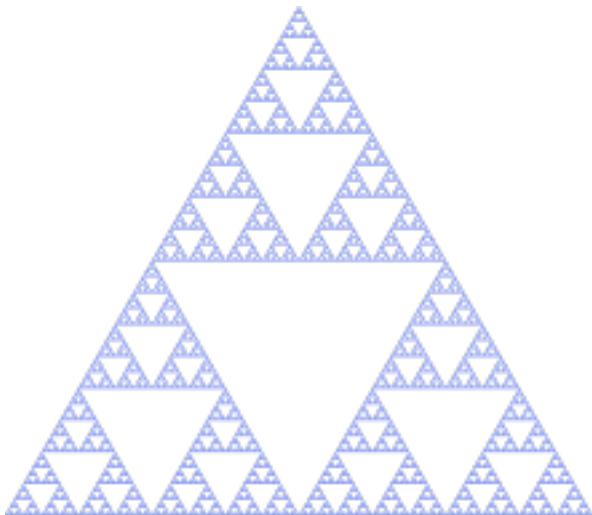


Ewolucja reguły 90

Reguła 90 w lepszej perspektywie



Trójkąt Sierpińskiego



Ewolucja - definicja

Nieskończona w obie strony taśma wypisanymi bitami to, formalnie, funkcja $\mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$.

Definicja

Niech F będzie automatem komórkowym. Niech E_0 będzie dowolną nieskończoną taśmą z wypisaniami elementami nazywaną *konfiguracją początkową*. Obliczamy $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ w następujący sposób:

$$E_1(k) = F(E_0(k-1), E_0(k), E_0(k+1)),$$

$$E_2(k) = F(E_1(k-1), E_1(k), E_1(k+1)),$$

$$E_n(k) = F(E_{n-1}(k-1), E_{n-1}(k), E_{n-1}(k+1)),$$

Ciąg $E_0, E_1, \dots, E_n, \dots$ nazywamy *ewolucją* automatu F .

Spis treści

- 1 Mathfigs
 - Paradoks więźniów
 - Batman i Zagadka 1000 beczek
 - Automaty komórkowe...?
- 2 Wstęp
 - Ogólnie zasady
- 3 Automaty jednowymiarowe
 - Podstawowe definicje
 - Reguła 90
 - **Reguła 184**
 - Reguła 30
 - Reguła 110
 - Inne reguły
- 4 Automaty dwuwymiarowe
 - Definicja
 - Game of life

Reguła 184 i jej ewolucja

Spis treści

- 1 Mathfigs
 - Paradoks więźniów
 - Batman i Zagadka 1000 beczek
 - Automaty komórkowe...?
- 2 Wstęp
 - Ogólnie zasady
- 3 Automaty jednowymiarowe
 - Podstawowe definicje
 - Reguła 90
 - Reguła 184
 - **Reguła 30**
 - Reguła 110
 - Inne reguły
- 4 Automaty dwuwymiarowe
 - Definicja
 - Game of life

Definicja reguły 30

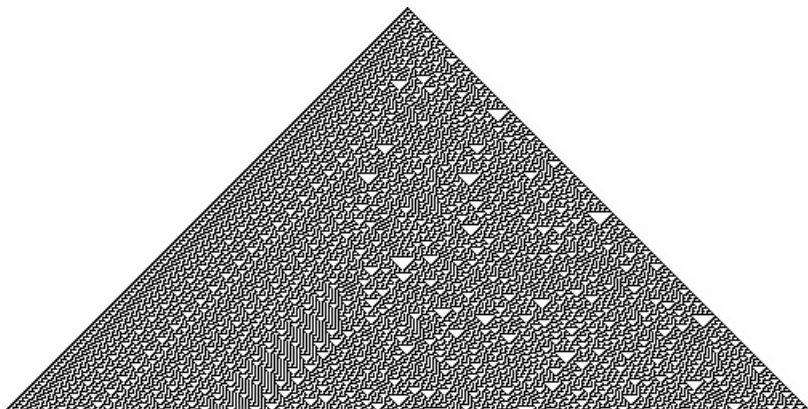
Reguła 30

$$F(a, b, c) = (a + b + c + b \cdot c) \pmod{2}.$$



Ewolucja reguły 30

Reguła 30 bez Batmana



Losowość ciągów

Ze środkowej kolumny ewolucji wyjmijmy pierwszych n bitów. Jak zbadać czy są one "losowe"? Czy ciągi: 000111, 101011 są losowe?

Losowość ciągów

Ze środkowej kolumny ewolucji wyjmijmy pierwszych n bitów. Jak zbadać czy są one "losowe"? Czy ciągi: 000111, 101011 są losowe?

Definicja (nie do końca formalna)

Ciąg $A = a_1, \dots, a_n$ zer i jedynek jest *jednostajnie losowy* jeśli dowolny ciąg bitów długości k występuje w ciągu A *mniej więcej* równą liczbę razy.

Losowość ciągów w Regule 30

Jeśli wyciągniemy pierwsze 960 wpisów w środkowej kolumnie ewolucji reguły 30, to powinno być:

$$k = 1 : \quad \frac{1}{2} \times 960 = 480$$

$$k = 2 : \quad \frac{1}{4} \times 480 = 120$$

$$k = 3 : \quad \frac{1}{8} \times 320 = 40$$

$$k = 4 : \quad \frac{1}{8} \times 240 = 15.$$

W rzeczywistości mamy:

1	498	462							
2	134	116	114	116					
3	55	38	34	41	41	38	28	45	
4	22	16	16	19	9	16	16	15	
	19	11	11	13	17	19			

Spis treści

1 Mathfigs

- Paradoks więźniów
- Batman i Zagadka 1000 beczek
- Automaty komórkowe...?

2 Wstęp

- Ogólnie zasady

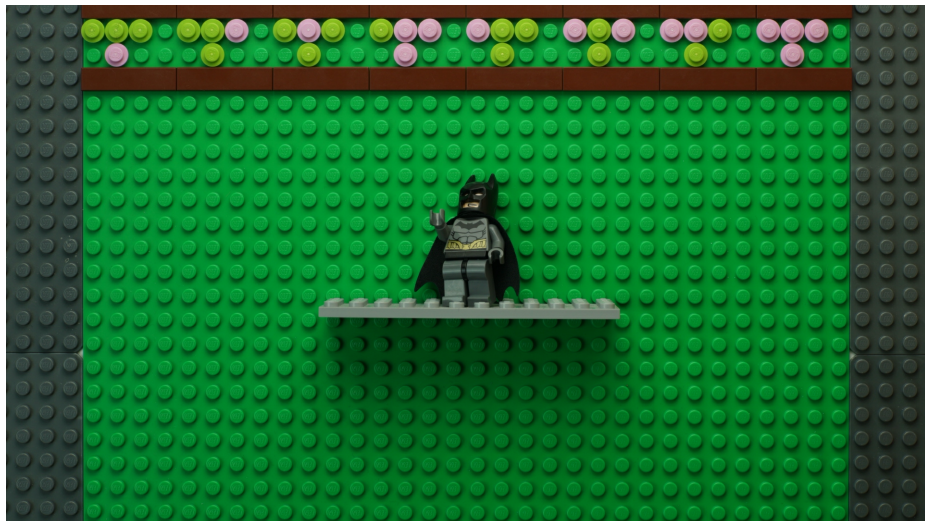
3 Automaty jednowymiarowe

- Podstawowe definicje
- Reguła 90
- Reguła 184
- Reguła 30
- **Reguła 110**
- Inne reguły

4 Automaty dwuwymiarowe

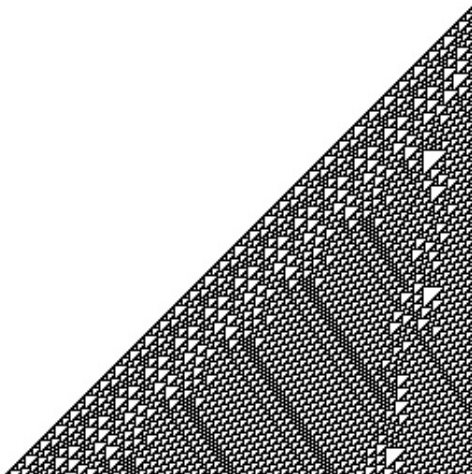
- Definicja
- Game of life

Reguła 110



Ewolucja reguły 110

Reguła 110 bez Batmana

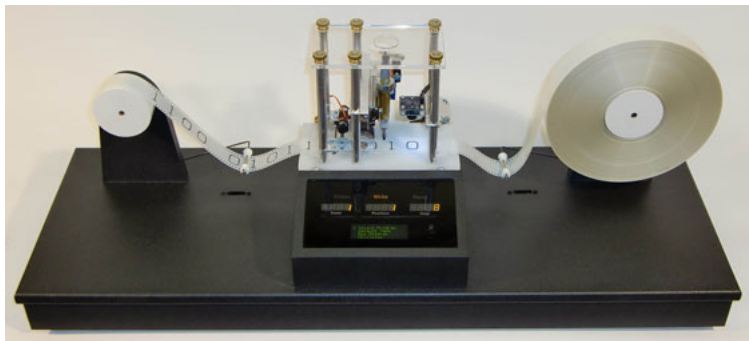


Maszyna Turinga

Filozoficznie pytanie

Czym jest obliczenie?

Maszyna Turinga jako matematyczny model komputera.

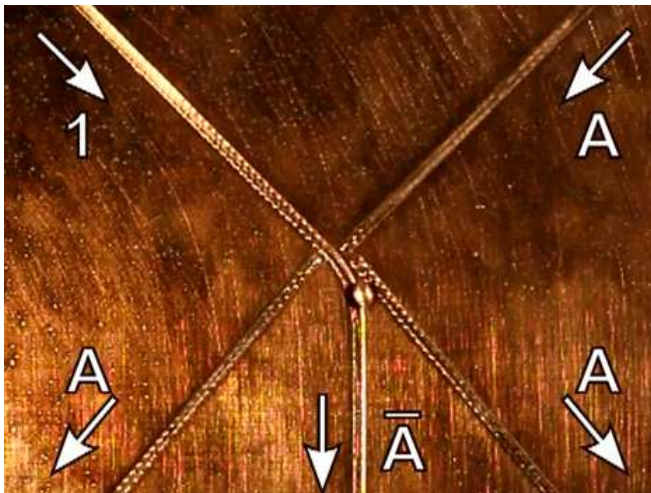


Turing zupełność

Definicja

System jest *zupełny/universalny w sensie Turinga* jeśli można go użyć tak, żeby symulował obliczenia dowolnej maszyny Turinga.

Obliczenia na cząstkach, czyli Collision-based Computing

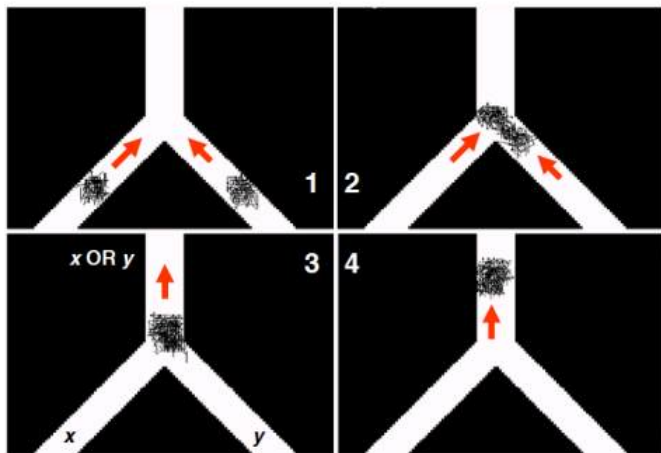


Obliczenia na krabach

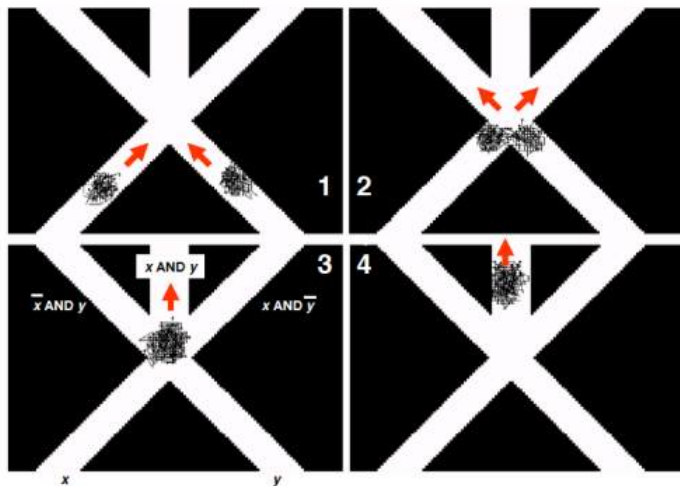
??????????



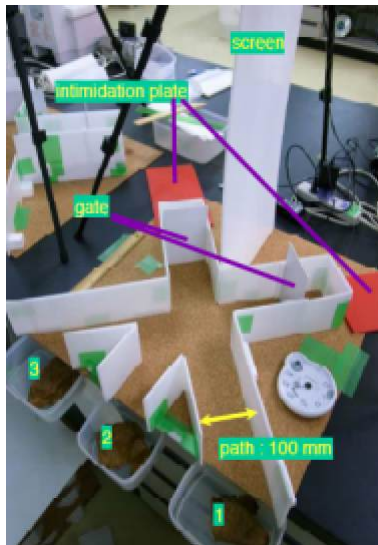
Obliczenia na krabach



Obliczenia na krabach



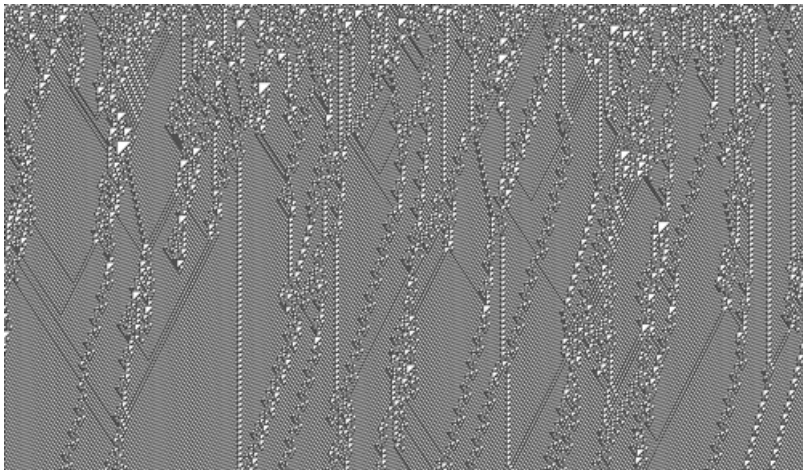
Obliczenia na krabach



Uniwersalność reguły 110

Twierdzenie

Reguła 110 jest uniwersalna.



Spis treści

1 Mathfigs

- Paradoks więźniów
- Batman i Zagadka 1000 beczek
- Automaty komórkowe...?

2 Wstęp

- Ogólnie zasady

3 Automaty jednowymiarowe

- Podstawowe definicje
- Reguła 90
- Reguła 184
- Reguła 30
- Reguła 110
- **Inne reguły**

4 Automaty dwuwymiarowe

- Definicja
- Game of life

Ile jest automatów komórkowych jednowymiarowych?

Liczba wszystkich automatów komórkowych

$$2^8 = 256$$

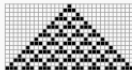
Fakt

Spośród 256 reguł 88 reguł jest istotnie różnych!

rule 30



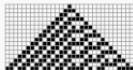
rule 54



rule 60



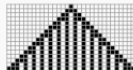
rule 62



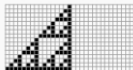
rule 90



rule 94



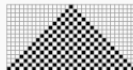
rule 102



rule 110



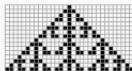
rule 122



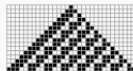
rule 126



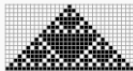
rule 150



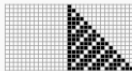
rule 158



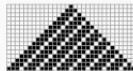
rule 182



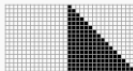
rule 188



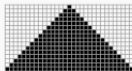
rule 190



rule 220



rule 222



rule 250

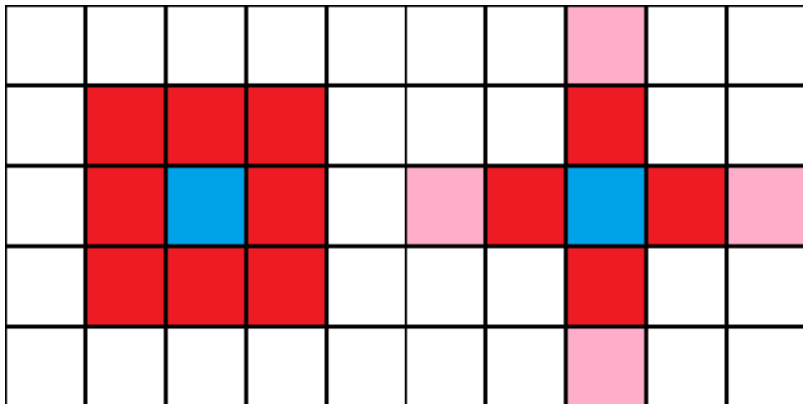


Spis treści

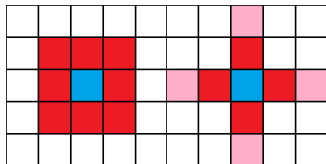
- 1 Mathfigs
 - Paradoks więźniów
 - Batman i Zagadka 1000 beczek
 - Automaty komórkowe...?
- 2 Wstęp
 - Ogólnie zasady
- 3 Automaty jednowymiarowe
 - Podstawowe definicje
 - Reguła 90
 - Reguła 184
 - Reguła 30
 - Reguła 110
 - Inne reguły
- 4 Automaty dwuwymiarowe
 - **Definicja**
 - Game of life

Zamiast jednowymiarowej taśmy nieskończonej w obie strony mamy nieskończoną siatkę zer i jedynek. Formalnie

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$$



Automat dwuwymiarowy - definicja



Definicja (sąsiedztwo von Neumanna)

Automatem dwuwymiarowym nazywamy funkcję

$$F : \mathbb{Z}_2^5 \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

Definicja (sąsiedztwo Moore'a)

Automatem dwuwymiarowym nazywamy funkcję

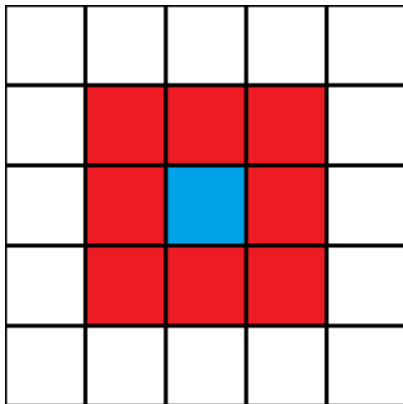
$$F : \mathbb{Z}_2^9 \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

Spis treści

- 1 Mathfigs
 - Paradoks więźniów
 - Batman i Zagadka 1000 beczek
 - Automaty komórkowe...?
- 2 Wstęp
 - Ogólnie zasady
- 3 Automaty jednowymiarowe
 - Podstawowe definicje
 - Reguła 90
 - Reguła 184
 - Reguła 30
 - Reguła 110
 - Inne reguły
- 4 Automaty dwuwymiarowe
 - Definicja
 - **Game of life**

Gra w życie

Przyjmujemy, że sąsiadami niebieskiego pola są:



Gra w życie

Zamiast mówić, że dane pole (a.k.a. komórka) jest 0 lub 1, będziemy mówić, że jeste umarłe lub żywe.

Definicja automatu Gra w Życie

- Każda żywa komórka z liczbą żywych sąsiadów mniejszą niż 2 umiera (niedoludnienie),
- Każda żywa komórka z liczbą żywych sąsiadów większą niż 3 umiera (przeludnienie),
- Każda żywa komórka z liczbą żywych sąsiadów równą 2 lub 3 przeżywa do następnego pokolenia,
- Każda umarła komórka z dokładnie 3 żywymi sąsiadami staje się żywa (reprodukcja).

Dwukomórkowe obiekty

Sprawdźmy co się dzieje z dwukomórkowymi obiektami...

`https://bitstorm.org/gameoflife/`

Dwukomórkowe obiekty

Sprawdźmy co się dzieje z dwukomórkowymi obiektami...

`https://bitstorm.org/gameoflife/`

Obserwacja

Każdy dwukomórkowy obiekt umiera po jednej iteracji.

Dwukomórkowe obiekty

Sprawdźmy co się dzieje z dwukomórkowymi obiektami...

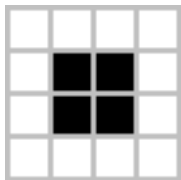
`https://bitstorm.org/gameoflife/`

Obserwacja

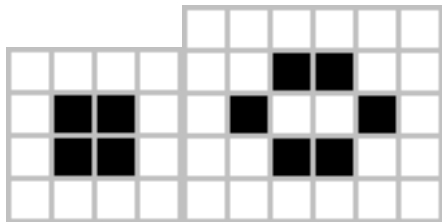
Każdy dwukomórkowy obiekt umiera po jednej iteracji.

To może teraz sprawdźmy jakiś trzykomórkowy twór?

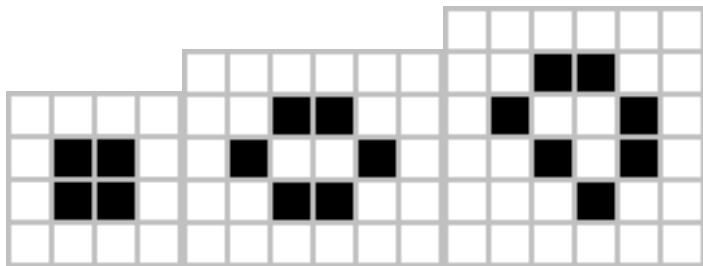
Gra w życie - większe przykłady



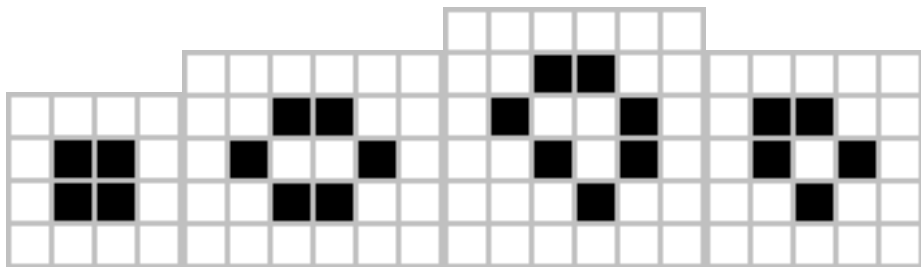
Gra w życie - większe przykłady



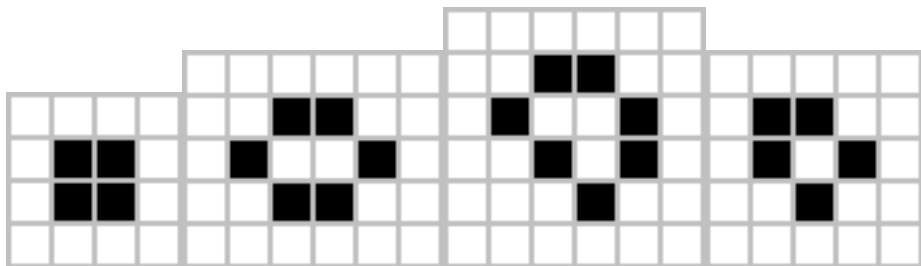
Gra w życie - większe przykłady



Gra w życie - większe przykłady



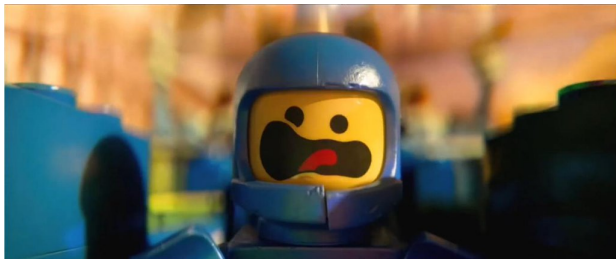
Gra w życie - większe przykłady



To są obiekty stacjonarne!

Statki

Widzieliśmy obiekty umierające, oscylujące, stacjonarne...teraz czas na tzw. statki (spaceships).



<https://bitstorm.org/gameoflife/>

Metuszlachowie



Definicja

Metuszlach to obiekt o mniej niż 10 komórkach, który dożywa sędziwego wieku w którym przestaje rosnąć.

Problem Conwaya za 50\$

Problem

Czy istnieje konfiguracja początkowa składająca się ze skończonej liczby żywych komórek, która nieograniczenie się rozrasta?

Garden of Eden

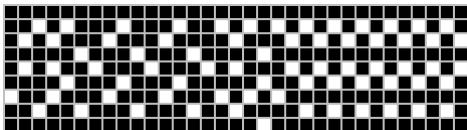
Problem

Czy istnieje konfiguracja składająca się ze skończonej liczby żywych komórek, która nigdy nie może być konfiguracją występującą w ewolucji (pomijając przypadek, kiedy jest konfiguracją początkową)?

Garden of Eden

Problem

Czy istnieje konfiguracja składająca się ze skończonej liczby żywych komórek, która nigdy nie może być konfiguracją występującą w ewolucji (pomijając przypadek, kiedy jest konfiguracją początkową)?



To już koniec...

Dziękuję za uwagę i zapraszam na poczęstunek i warsztaty!

Bibliografia

- S. Wolfram, "A New Kind of Science",
- J.L. Schiff "Introduction to Cellular Automata"
- Wikipedia :)