

W krainie wielu logik

Tomasz Brengos i Paweł Naroski

11 maja 2013

Zawartość

- 1 Wstęp
- 2 Rachunek zdań
 - Budowa i semantyka
 - Dowody formalne
 - Zgodność i pełność
- 3 Inne logiki
 - Logika pierwszego rzędu
 - Logika wielowartościowa
 - Logika modalna

Czym jest logika?

Logika - definicja słownikowa

Logika to system zasad dowodzenia i wnioskowania.

Zawartość

1 Wstęp

2 Rachunek zdań

- Budowa i semantyka
- Dowody formalne
- Zgodność i pełność

3 Inne logiki

- Logika pierwszego rzędu
- Logika wielowartościowa
- Logika modalna

Zawartość

- 1 Wstęp
- 2 Rachunek zdań
 - Budowa i semantyka
 - Dowody formalne
 - Zgodność i pełność
- 3 Inne logiki
 - Logika pierwszego rzędu
 - Logika wielowartościowa
 - Logika modalna

Definicja rachunku zdań

Zmienne:

A = „Azja jest największym kontynentem.”;

B = „Bóbr jest ptakiem.”;

C = „Czosnek jest pyszny.”.

Definicja rachunku zdań

Zmienne:

A = „Azja jest największym kontynentem.”;

B = „Bóbr jest ptakiem.”;

C = „Czosnek jest pyszny.”.

Prawdziwość, ani treść zmiennych nie mają znaczenia!

Definicja rachunku zdań

Zmienne:

A = „Azja jest największym kontynentem.”;

B = „Bóbr jest ptakiem.”;

C = „Czosnek jest pyszny.”.

Prawdziwość, ani treść zmiennych nie mają znaczenia!

Nie badamy prawdy!

Definicja rachunku zdań

Zmienne:

A = „Azja jest największym kontynentem.”;

B = „Bóbr jest ptakiem.”;

C = „Czosnek jest pyszny.”.

Prawdziwość, ani treść zmiennych nie mają znaczenia!

Nie badamy prawdy!

Badamy jaki wpływ na prawdziwość jednych zdań ma prawdziwość innych zdań.

Definicja rachunku zdań

Zmienne:

A = „Azja jest największym kontynentem.”;

B = „Bóbr jest ptakiem.”;

C = „Czosnek jest pyszny.”.

Prawdziwość, ani treść zmiennych nie mają znaczenia!

Nie badamy prawdy!

Badamy jaki wpływ na prawdziwość jednych zdań ma prawdziwość innych zdań.

Zmienne są cegiełkami, z których będziemy budować zdania rachunku zdań.

Definicja rachunku zdań

Definicja (nieformalna)

Język rachunku zdań zawiera słowa „nie”, „i”, „lub”, „wynika” oraz „wtedy i tylko wtedy, gdy”. Będziemy stosować symbole

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

Uwaga

Tłumaczenie z naturalnego języka do języka logiki nie jest dokładne!.

Definicja rachunku zdań

Definicja (nieformalna)

Język rachunku zdań zawiera słowa „nie”, „i”, „lub”, „wynika” oraz „wtedy i tylko wtedy, gdy”. Będziemy stosować symbole

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

Uwaga

Tłumaczenie z naturalnego języka do języka logiki nie jest dokładne!.

W języku logiki $A \wedge B$ znaczy to samo co $B \wedge A$. W języku naturalnym często można zamieniać kolejność fraz połączonych spójnikiem „i”, ale nie zawsze.

Definicja rachunku zdań

Definicja (nieformalna)

Język rachunku zdań zawiera słowa „nie”, „i”, „lub”, „wynika” oraz „wtedy i tylko wtedy, gdy”. Będziemy stosować symbole

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

Uwaga

Tłumaczenie z naturalnego języka do języka logiki nie jest dokładne!.

W języku logiki $A \wedge B$ znaczy to samo co $B \wedge A$. W języku naturalnym często można zamieniać kolejność fraz połączonych spójnikiem „i”, ale nie zawsze.

Ania oszalała i zaczęła uczyć się logiki.

Ania zaczęła uczyć się logiki i oszalała.

Definicja rachunku zdań

Definicja języka

Język rachunku zdań składa się ze zbioru $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ zmiennych. Ponadto,

- jeśli F jest formułą języka RZ, to $\neg F$ jest formułą RZ,
- jeśli F, G są formułami języka RZ, to $F \vee G, F \wedge G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G$ są formułami RZ.

Definicja rachunku zdań

Definicja języka

Język rachunku zdań składa się ze zbioru $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ zmiennych. Ponadto,

- jeśli F jest formułą języka RZ, to $\neg F$ jest formułą RZ,
- jeśli F, G są formułami języka RZ, to $F \vee G, F \wedge G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G$ są formułami RZ.

Przykład

x_1 x_2 x_9

Definicja rachunku zdań

Definicja języka

Język rachunku zdań składa się ze zbioru $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ zmiennych. Ponadto,

- jeśli F jest formułą języka RZ, to $\neg F$ jest formułą RZ,
- jeśli F, G są formułami języka RZ, to $F \vee G, F \wedge G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G$ są formułami RZ.

Przykład

x_1	x_2	x_9
$\neg x_1$	$x_9 \vee x_2$	

Definicja rachunku zdań

Definicja języka

Język rachunku zdań składa się ze zbioru $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ zmiennych. Ponadto,

- jeśli F jest formułą języka RZ, to $\neg F$ jest formułą RZ,
- jeśli F, G są formułami języka RZ, to $F \vee G, F \wedge G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G$ są formułami RZ.

Przykład

$$\begin{array}{lll} x_1 & x_2 & x_9 \\ \neg x_1 & x_9 \vee x_2 & \\ \neg x_1 \rightarrow (x_9 \vee x_2) & & \end{array}$$

Definicja rachunku zdań

Definicja języka

Język rachunku zdań składa się ze zbioru $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ zmiennych. Ponadto,

- jeśli F jest formułą języka RZ, to $\neg F$ jest formułą RZ,
- jeśli F, G są formułami języka RZ, to $F \vee G, F \wedge G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G$ są formułami RZ.

Przykład

$$\begin{array}{l} x_1 \quad \quad x_2 \quad \quad x_9 \\ \neg x_1 \quad \quad x_9 \vee x_2 \\ \neg x_1 \rightarrow (x_9 \vee x_2) \\ x_2 \leftrightarrow [\neg x_1 \rightarrow (x_9 \vee x_2)] \end{array}$$

Semantyka RZ, czyli jak interpretować formuły

F	$\neg F$
0	1
1	0

Semantyka RZ, czyli jak interpretować formuły

F	G	$F \wedge G$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Semantyka RZ, czyli jak interpretować formuły

F	G	$F \vee G$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Semantyka RZ, czyli jak interpretować formuły

F	G	$F \rightarrow G$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Semantyka RZ, czyli jak interpretować formuły

F	G	$F \rightarrow G$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Test wyboru Wasona

Dane są cztery karty. Każda ma na jednej stronie napisaną liczbę, a na drugiej literę. Dana jest też pewna formuła W głosząca o danych kartach.

Test wyboru Wasona

Dane są cztery karty. Każda ma na jednej stronie napisaną liczbę, a na drugiej literę. Dana jest też pewna formuła W głosząca o danych kartach.

Pytanie: Które karty trzeba odwrócić, aby stwierdzić czy formuła W jest prawdziwa?

Test wyboru Wasona

Dane są cztery karty. Każda ma na jednej stronie napisaną liczbę, a na drugiej literę. Dana jest też pewna formuła W głosząca o danych kartach.

Pytanie: Które karty trzeba odwrócić, aby stwierdzić czy formuła W jest prawdziwa?

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

Test wyboru Wasona

Dane są cztery karty. Każda ma na jednej stronie napisaną liczbę, a na drugiej literę. Dana jest też pewna formuła W głosząca o danych kartach.

Pytanie: Które karty trzeba odwrócić, aby stwierdzić czy formuła W jest prawdziwa?

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

E	K	4	7
---	---	---	---

Test wyboru Wasona

Dane są cztery karty. Każda ma na jednej stronie napisaną liczbę, a na drugiej literę. Dana jest też pewna formuła W głosząca o danych kartach.

Pytanie: Które karty trzeba odwrócić, aby stwierdzić czy formuła W jest prawdziwa?

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

E	K	4	7
---	---	---	---

Test wyboru Wasona

Dane są cztery karty. Każda ma na jednej stronie napisaną liczbę, a na drugiej literę. Dana jest też pewna formuła W głosząca o danych kartach.

Pytanie: Które karty trzeba odwrócić, aby stwierdzić czy formuła W jest prawdziwa?

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

E	K	4	7
---	---	---	---

Test wyboru Wasona

Dane są cztery karty. Każda ma na jednej stronie napisaną liczbę, a na drugiej literę. Dana jest też pewna formuła W głosząca o danych kartach.

Pytanie: Które karty trzeba odwrócić, aby stwierdzić czy formuła W jest prawdziwa?

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

E	K	4	7
---	---	---	---

Test wyboru Wasona

Dane są cztery karty. Każda ma na jednej stronie napisaną liczbę, a na drugiej literę. Dana jest też pewna formuła W głosząca o danych kartach.

Pytanie: Które karty trzeba odwrócić, aby stwierdzić czy formuła W jest prawdziwa?

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

E	K	4	7
---	---	---	---

Test wyboru Wasona

Dane są cztery karty. Każda ma na jednej stronie napisaną liczbę, a na drugiej literę. Dana jest też pewna formuła W głosząca o danych kartach.

Pytanie: Które karty trzeba odwrócić, aby stwierdzić czy formuła W jest prawdziwa?

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

E	K	4	7
---	---	---	---

Odpowiedź: E i 7.

Semantyka RZ, czyli jak interpretować formuły

F	G	$F \rightarrow G$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

F = „Na karcie jest samogłoska.”

G = „Na karcie jest liczba parzysta.”

E	K	4	7
---	---	---	---

Semantyka RZ, czyli jak interpretować formuły

F	G	$F \rightarrow G$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

F = „Na karcie jest samogłoska.”

G = „Na karcie jest liczba parzysta.”

E	K	4	7
---	---	---	---

Semantyka RZ, czyli jak interpretować formuły

F	G	$F \rightarrow G$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

F = „Na karcie jest samogłoska.”

G = „Na karcie jest liczba parzysta.”

E	K	4	7
---	---	---	---

Semantyka RZ, czyli jak interpretować formuły

F	G	$F \rightarrow G$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

F = „Na karcie jest samogłoska.”

G = „Na karcie jest liczba parzysta.”

E	K	4	7
---	---	---	---

Semantyka RZ, czyli jak interpretować formuły

F	G	$F \rightarrow G$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Formuła W

Jeśli karta ma samogłoskę na jednej stronie, to ma liczbę parzystą na drugiej stronie.

F = „Na karcie jest samogłoska.”

G = „Na karcie jest liczba parzysta.”

E	K	4	7
---	---	---	---

Semantyka RZ, czyli jak interpretować formuły

F	G	$F \leftrightarrow G$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Definicja

Formułę F rachunku zdań nazywamy *tautologią*, jeśli dla każdego podstawienia 0 i 1 za zmienne, formuła jest prawdziwa.

Przykład:

$$x \vee \neg x$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$\neg(0 \wedge 0) \leftrightarrow (\neg 0 \vee \neg 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$\neg(0 \wedge 0) \leftrightarrow (\neg 0 \vee \neg 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$\neg(0 \wedge 0) \leftrightarrow (1 \vee \neg 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$\neg(0 \wedge 0) \leftrightarrow (1 \vee \neg 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$\neg(0 \wedge 0) \leftrightarrow (1 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$\neg(0 \wedge 0) \leftrightarrow (1 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$\neg 0 \leftrightarrow (1 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$\neg 0 \leftrightarrow (1 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$1 \leftrightarrow (1 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$1 \leftrightarrow (1 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$1 \leftrightarrow 1$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$1 \leftrightarrow 1$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

1

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$\neg(0 \wedge 1) \leftrightarrow (\neg 0 \vee \neg 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$\neg(0 \wedge 1) \leftrightarrow (\neg 0 \vee \neg 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$\neg(0 \wedge 1) \leftrightarrow (1 \vee \neg 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$\neg(0 \wedge 1) \leftrightarrow (1 \vee \neg 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$\neg(0 \wedge 1) \leftrightarrow (1 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$\neg(0 \wedge 1) \leftrightarrow (1 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$\neg 0 \leftrightarrow (1 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$\neg 0 \leftrightarrow (1 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$1 \leftrightarrow (1 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$1 \leftrightarrow (1 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$1 \leftrightarrow 1$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

$$1 \leftrightarrow 1$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 0 \qquad y = 1$$

1

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$\neg(1 \wedge 1) \leftrightarrow (\neg 1 \vee \neg 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$\neg(1 \wedge 1) \leftrightarrow (\neg 1 \vee \neg 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$\neg(1 \wedge 1) \leftrightarrow (0 \vee \neg 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$\neg(1 \wedge 1) \leftrightarrow (0 \vee \neg 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$\neg(1 \wedge 1) \leftrightarrow (0 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$\neg(1 \wedge 1) \leftrightarrow (0 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$\neg 1 \leftrightarrow (0 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$\neg 1 \leftrightarrow (0 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$0 \leftrightarrow (0 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$0 \leftrightarrow (0 \vee 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$0 \leftrightarrow 0$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$0 \leftrightarrow 0$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 1$$

$$1$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$\neg(1 \wedge 0) \leftrightarrow (\neg 1 \vee \neg 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$\neg(1 \wedge 0) \leftrightarrow (\neg 1 \vee \neg 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$\neg(1 \wedge 0) \leftrightarrow (0 \vee \neg 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$\neg(1 \wedge 0) \leftrightarrow (0 \vee \neg 0)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$\neg(1 \wedge 0) \leftrightarrow (0 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$\neg(1 \wedge 0) \leftrightarrow (0 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$\neg 0 \leftrightarrow (0 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$\neg 0 \leftrightarrow (0 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$1 \leftrightarrow (0 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$1 \leftrightarrow (0 \vee 1)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$1 \leftrightarrow 1$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

$$1 \leftrightarrow 1$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$x = 1 \qquad y = 0$$

1

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Prawa de Morgana

$$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$\neg(x \vee y) \leftrightarrow (\neg x \wedge \neg y)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$[1 \vee (0 \wedge 1)] \leftrightarrow [(1 \vee 0) \wedge (1 \vee 1)]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$[1 \vee (0 \wedge 1)] \leftrightarrow [(1 \vee 0) \wedge (1 \vee 1)]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$[1 \vee 0] \leftrightarrow [(1 \vee 0) \wedge (1 \vee 1)]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$[1 \vee 0] \leftrightarrow [(1 \vee 0) \wedge (1 \vee 1)]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$[1 \vee 0] \leftrightarrow [1 \wedge (1 \vee 1)]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$[1 \vee 0] \leftrightarrow [1 \wedge (1 \vee 1)]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$[1 \vee 0] \leftrightarrow [1 \wedge 1]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$[1 \vee 0] \leftrightarrow [1 \wedge 1]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$1 \leftrightarrow [1 \wedge 1]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$1 \leftrightarrow [1 \wedge 1]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$1 \leftrightarrow 1$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$1 \leftrightarrow 1$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

$$1$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy

$$[x \wedge (y \vee z)] \leftrightarrow [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy

$$[x \wedge (y \vee z)] \leftrightarrow [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$$

Rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Tautologie, czyli formuły prawdziwe

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$[x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy

$$[x \wedge (y \vee z)] \leftrightarrow [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$$

Rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Rozdzielność dodawania względem mnożenia???:

$$x + (y \cdot z) \neq (x + y) \cdot (x + z)$$

Konsekwencje

Jeśli formuła F prawdziwa jest dla każdego podstawienia 0 i 1 za zmienne, to będziemy mówić, że F jest *tautologią* i zapisujemy to $\emptyset \models F$.

Konsekwencje

Jeśli formuła F prawdziwa jest dla każdego podstawienia 0 i 1 za zmienne, to będziemy mówić, że F jest *tautologią* i zapisujemy to $\emptyset \models F$.

Oznaczmy przez S zbiór podstawień, przy których dana formuła G jest prawdziwa.

Jeśli formuła F prawdziwa jest dla każdego podstawienia ze zbioru S , to będziemy mówić, że F jest *konsekwencją formuły G* i zapisujemy to $\{G\} \models F$.

Konsekwencje

Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem formuł, a S zbiorem podstawień, przy których *każda* formuła ze zbioru $\mathcal{F}$ jest prawdziwa.

Jeśli formuła F prawdziwa jest dla każdego podstawienia ze zbioru S , to będziemy mówić, że F jest *konsekwencją zbioru formuł $\mathcal{F}$* i zapisujemy to $\mathcal{F} \models F$.

Konsekwencje

Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem formuł, a S zbiorem podstawień, przy których *każda* formuła ze zbioru $\mathcal{F}$ jest prawdziwa.

Jeśli formuła F prawdziwa jest dla każdego podstawienia ze zbioru S , to będziemy mówić, że F jest *konsekwencją zbioru formuł $\mathcal{F}$* i zapisujemy to $\mathcal{F} \models F$.

Mówi się nieraz, że $\mathcal{F}$ *pociąga za sobą* F .

Na przykład

$$\emptyset \models \neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

Na przykład

$$\emptyset \models \neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

$$\emptyset \models [x \wedge (y \vee z)] \leftrightarrow [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$$

Trochę trudniejszy przykład

Pokażemy, że $\{x, x \rightarrow y\} \models y$.

Trochę trudniejszy przykład

Pokażemy, że $\{x, x \rightarrow y\} \models y$. Elementy zbioru formuł $\{x, x \rightarrow y\}$ są prawdziwe, jeśli $x = 1$ oraz $x \rightarrow y = 1$.

Trochę trudniejszy przykład

Pokażemy, że $\{x, x \rightarrow y\} \models y$. Elementy zbioru formuł $\{x, x \rightarrow y\}$ są prawdziwe, jeśli $x = 1$ oraz $x \rightarrow y = 1$. Formuła $x \rightarrow y = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0, y = 0$, $x = 1, y = 1$ oraz $x = 0, y = 1$.

Trochę trudniejszy przykład

Pokażemy, że $\{x, x \rightarrow y\} \models y$. Elementy zbioru formuł $\{x, x \rightarrow y\}$ są prawdziwe, jeśli $x = 1$ oraz $x \rightarrow y = 1$. Formuła $x \rightarrow y = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0, y = 0$, $x = 1, y = 1$ oraz $x = 0, y = 1$. Ponieważ $x = 1$ zostaje nam $x = 1, y = 1$. Więc zbiorem podstawień dla których zachodzi prawdziwość każdej z formuł z $\{x, x \rightarrow y\}$ jest zbiór

$$S = \{x = 1, y = 1\}$$

Zawartość

- 1 Wstęp
- 2 Rachunek zdań
 - Budowa i semantyka
 - Dowody formalne
 - Zgodność i pełność
- 3 Inne logiki
 - Logika pierwszego rzędu
 - Logika wielowartościowa
 - Logika modalna

System dowodzenia i poprawność

Czym powinien być system dowodzenia?

Celem formalnego systemu dowodzenia jest uczynić proces myślowy nieomylnym. Najlepiej byłoby, gdybyśmy całkowicie zastąpili proces myślowy systemem dowodzenia.

Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem formuł i niech G będzie formułą logiki. Jeśli G można wyprowadzić za pomocą systemu dowodzenia z $\mathcal{F}$, to oznaczamy to przez $\mathcal{F} \vdash G$.

Zasady wnioskowania RZ

Przesłanka	Wniosek	Nazwa zasady
$G \in \mathcal{F}$	$\mathcal{F} \vdash G$	założenie
$\mathcal{F} \vdash G \text{ i } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$	$\mathcal{F}' \vdash G$	monotoniczność
$\mathcal{F} \vdash G$	$\mathcal{F} \vdash \neg\neg G$	podwójna negacja
$\mathcal{F} \vdash G_1, \mathcal{F} \vdash G_2$	$\mathcal{F} \vdash (G_1 \wedge G_2)$	$\wedge$ -wprowadzenie
$\mathcal{F} \vdash (G_1 \wedge G_2)$	$\mathcal{F} \vdash G_1, \mathcal{F} \vdash G_2$	$\wedge$ -eliminacja
$\mathcal{F} \vdash (G_1 \wedge G_2)$	$\mathcal{F} \vdash (G_2 \wedge G_1)$	$\wedge$ -symetria
$\mathcal{F} \vdash G_1$	$\mathcal{F} \vdash (G_1 \vee G_2)$	$\vee$ -wprowadzenie
$\mathcal{F} \vdash (G_1 \vee G_2),$ $\mathcal{F} \cup \{G_1\} \vdash H, \mathcal{F} \cup \{G_2\} \vdash H$	$\mathcal{F} \vdash H$	$\vee$ – eliminacja

Zasady wnioskowania RZ

Przesłanka	Wniosek	Nazwa zasady
$\mathcal{F} \vdash (G_1 \vee G_2)$	$\mathcal{F} \vdash (G_2 \vee G_1)$	$\vee$ -symetria
$\mathcal{F} \cup \{F\} \vdash G$	$\mathcal{F} \vdash (F \rightarrow G)$	$\rightarrow$ -wprowadzenie
$\mathcal{F} \vdash (F \rightarrow G), \mathcal{F} \vdash F$	$\mathcal{F} \vdash G$	$\rightarrow$ -eliminacja
$\mathcal{F} \vdash F$	$\mathcal{F} \vdash (F)$	$()$ -wprowadzenie
$\mathcal{F} \vdash (F)$	$\mathcal{F} \vdash F$	$()$ -eliminacja
$\mathcal{F} \vdash (F \vee G) \vee H$	$\mathcal{F} \vdash F \vee (G \vee H)$	$\vee$ -nawiasowanie
$\mathcal{F} \vdash (F \wedge G) \wedge H$	$\mathcal{F} \vdash F \wedge (G \wedge H)$	$\wedge$ -nawiasowanie

Zasady wnioskowania RZ: jeszcze tylko trzy...

Zasada	Nazwa zasady
$\mathcal{F} \vdash (F \vee G) \text{ wtw } \mathcal{F} \vdash \neg(\neg F \wedge \neg G)$	$\vee$ – definicja
$\mathcal{F} \vdash (F \rightarrow G) \text{ wtw } \mathcal{F} \vdash (\neg F \vee G)$	$\rightarrow$ – definicja
$\mathcal{F} \vdash (F \leftrightarrow G) \text{ wtw } \mathcal{F} \vdash (F \rightarrow G) \text{ i } \mathcal{F} \vdash (G \rightarrow F)$	$\leftrightarrow$ – definicja

Formalny dowód

Formalny dowód

Formalnym dowodem w RZ nazywamy skończony ciąg wyrażeń $\mathcal{X} \vdash Y$ ($\mathcal{X}$ jest zbiorem formuł, a Y jest formułą), w którym każde wyrażenie można wyprowadzić z poprzedzających je wyrażeń używając powyższych reguł. Mówimy, że G wyprowadzamy z $\mathcal{F}$ jeśli istnieje formalny dowód, którego ostatnim wyrazem jest wyrażenie $\mathcal{F} \vdash G$.

Przykłady

Wreszcie należałoby coś udowodnić...

Zasada tautologii

Przesłanka: $\emptyset$

Wniosek: $\mathcal{F} \vdash (G \vee \neg G)$

Dowód:

- ❶ $\mathcal{F} \cup \{G\} \vdash G$ (założenie)
- ❷ $\mathcal{F} \vdash G \rightarrow G$ ($\rightarrow$ -wprowadzenie w (1)),
- ❸ $\mathcal{F} \vdash (\neg G \vee G)$ ($\rightarrow$ -definicja w (2))

Przykłady

Zasada sprzeczności

Przesłanka: $\mathcal{F} \vdash (G \wedge \neg G)$

Wniosek: $\mathcal{F} \vdash H$

Dowód:

- 1 $\mathcal{F} \vdash (G \wedge \neg G),$
- 2 $\mathcal{F} \vdash \neg G,$
- 3 $\mathcal{F} \vdash (\neg G \vee H)$
- 4 $\mathcal{F} \vdash (G \rightarrow H)$
- 5 $\mathcal{F} \vdash G,$
- 6 $\mathcal{F} \vdash H$ ($\rightarrow$ -eliminacja (5)+(4)).

Zawartość

- 1 Wstęp
- 2 Rachunek zdań
 - Budowa i semantyka
 - Dowody formalne
 - Zgodność i pełność
- 3 Inne logiki
 - Logika pierwszego rzędu
 - Logika wielowartościowa
 - Logika modalna

System dowodzenia

Zgodność logiki

Logikę nazywamy *zgodną* jeśli każda formuła G , którą daje się wyprowadzić za pomocą formalnego systemu dowodzenia ze zbioru formuł $\mathcal{F}$ jest konsekwencją zbioru $\mathcal{F}$.

Zgodność logiki w jednej linii

Logikę nazywamy zgodną jeśli spełnia $\mathcal{F} \vdash G$, to $\mathcal{F} \models G$.

Zgodność RZ

Czy logika RZ wraz z jej zasadami wnioskowania jest zgodna?

Zgodność RZ

Czy logika RZ wraz z jej zasadami wnioskowania jest zgodna?

Fakt

Tak! Logika RZ jest zgodna.

Dowód (jego szkic): musimy pokazać, że każda z reguł wnioskowania przedstawionych kilka slajdów temu jest zgodna. Zademonstrujemy na przykładzie $\wedge$ -eliminacji. Reguła ta mówi, że jeśli $\mathcal{F} \vdash (F \wedge G)$, to $\mathcal{F} \vdash F$. Musimy więc pokazać, że jeśli $\mathcal{F} \models (F \wedge G)$, to $\mathcal{F} \models F$, czyli, że $(F \wedge G)$ pociąga F .

Pełność logiki

Pełność logiki jest odwrotnością zgodności.

Pełność

Logikę nazywamy *pełną*, jeśli

$$\mathcal{F} \models G \implies \mathcal{F} \vdash G.$$

Innymi słowy wszystko co jest prawdziwe, da się udowodnić i na odwrót.

Twierdzenie

Logika rachunku zdań jest zgodna i pełna, tj.

$$\mathcal{F} \models G \iff \mathcal{F} \vdash G.$$

Zawartość

- 1 Wstęp
- 2 Rachunek zdań
 - Budowa i semantyka
 - Dowody formalne
 - Zgodność i pełność
- 3 Inne logiki
 - Logika pierwszego rzędu
 - Logika wielowartościowa
 - Logika modalna

Zawartość

- 1 Wstęp
- 2 Rachunek zdań
 - Budowa i semantyka
 - Dowody formalne
 - Zgodność i pełność
- 3 Inne logiki
 - Logika pierwszego rzędu
 - Logika wielowartościowa
 - Logika modalna

Logika pierwszego rzędu

Logika pierwszego rzędu ma język bogatszy niż rachunek zdań. Tak jak w RZ zawiera symbole $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ oraz dodatkowe symbole $\exists$ ("istnieje") i $\forall$ ("dla wszystkich") wraz z różnymi symbolami reprezentującymi zmienne, stałe, funkcje i relacje.

Przykład zdania

$$\exists x \forall y, x \leq f(y)$$

Zawartość

- 1 Wstęp
- 2 Rachunek zdań
 - Budowa i semantyka
 - Dowody formalne
 - Zgodność i pełność
- 3 Inne logiki
 - Logika pierwszego rzędu
 - **Logika wielowartościowa**
 - Logika modalna

Logika wielowartościowa

Oprócz klasycznych 0 (fałszu) i 1 (prawdy) dopuszcza się inne wartości logiczne. Najbardziej znaną jest logika trójwartościowa $\{0, 1, ?\}$, gdzie trzeci symbol ? może być rozumiany jako "nie wiem".

x	$\neg x$
0	1
?	?
1	0

Logika trójwartościowa cd

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$
0	0	0	0
?	0	?	0
1	0	1	0
0	?	?	0
?	?	?	?
1	?	1	?
0	1	1	0
?	1	1	?
1	1	1	1

Logika trójwartościowa cd

W literaturze rozważa się dwie różne definicje tabelek implikacji. Tabelka po lewej odpowiada trójwartościowej logice Kleenego (K3). Ta po prawej natomiast to implikacja w trójwartościowej logice Łukasiewicza (Ł3).

$x \rightarrow_K y$	0	?	1
0	1	1	1
?	?	?	1
1	0	?	1

$x \rightarrow_L y$	0	?	1
0	1	1	1
?	?	1	1
1	0	?	1

Mamy $x \rightarrow_K y = \neg x \vee y$.

Zawartość

- 1 Wstęp
- 2 Rachunek zdań
 - Budowa i semantyka
 - Dowody formalne
 - Zgodność i pełność
- 3 Inne logiki
 - Logika pierwszego rzędu
 - Logika wielowartościowa
 - Logika modalna

Logika modalna

Logika modalna rozszerza logikę rachunku zdań o tzw. *modalności* $\Box$ i $\Diamond$.

Logika modalna

Logika modalna rozszerza logikę rachunku zdań o tzw. *modalności* $\Box$ i $\Diamond$.

Definicja języka logiki modalnej

Język rachunku zdań składa się ze zbioru $\{p_1, p_2, \dots\}$ zmiennych.

- $\perp$ jest formułą języka LM (zdanie $\perp$ jest rozumiany jako zdanie nieprawdziwe),
- jeśli ϕ jest formułą języka LM, to $\neg\phi$ jest formułą LM,
- jeśli ϕ, ψ są formułami języka LM, to $\phi \vee \psi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$ są formułami LM,
- jeśli ϕ jest formułą to $\Box\phi$ oraz $\Diamond\phi$ są formułami LM.

Rozumienie modalności

- modalność $\Box$ czytamy zazwyczaj "koniecznie"
- modalność $\Diamond$ czytamy zazwyczaj "przypuszczalnie"

W klasycznej logice modalnej (oczywiście są też nieklasyczne jej wersje) mamy

$$\Diamond\phi \leftrightarrow \neg\Box\neg\phi \text{ oraz } \Box\phi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\phi.$$

Przykład z języka mówionego

Przypuszczalnie jutro będzie padał deszcz wtw *niekoniecznie nie* będzie padał deszcz.

Jutro *koniecznie* (na pewno) będzie padał deszcz wtw *nie* jest prawdą, że *przypuszczalnie nie* będzie padał deszcz.

Semantyka logiki modalnej: jak interpretujemy formuły?

Sama informacja o prawdziwości jak w przypadku RZ nie wystarczy. Załóżmy, że ϕ jest prawdziwe. Czy prawdziwe jest wtedy $\Box\phi$ oraz $\Diamond\phi$?

Semantyka logiki modalnej: jak interpretujemy formuły?

dziś

w

jutro

pada deszcz

świeci słońce

$w \models \Diamond \text{jutro pada deszcz.}$

Semantyka logiki modalnej: jak interpretujemy formuły?

dziś

w

jutro

pada deszcz

świeci słońce

$w \models \Diamond \text{jutro pada deszcz.}$

w

pada deszcz

jest straszna burza z deszczem

$w \models \Box \text{jutro pada deszcz.}$

Bibliografia

- *P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema*: Modal logic.
- *S. Hedman*: A First Course in Logic. An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity.