

MiNI Akademia Matematyki

Proste sposoby na trudne problemy

Paweł Naroski

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej

Warszawa, 9 IV 2011

KRÓTKIE WPROWADZENIE

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

Symbolem $\binom{n}{k}$ będziemy oznaczać liczbę k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

Symbolem $\binom{n}{k}$ będziemy oznaczać liczbę k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego.

Np. wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ to $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, więc $\binom{4}{2} = 6$.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

Symbolem $\binom{n}{k}$ będziemy oznaczać liczbę k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

Symbolem $\binom{n}{k}$ będziemy oznaczać liczbę k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$a_1 + \dots + a_n = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$$

$|A|$ - liczba elementów zbioru A

$|A|$ - liczba elementów zbioru A

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

$|A|$ - liczba elementów zbioru A

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

$A \cup B$ - suma zbiorów A i B , czyli zbiór tych elementów, które należą do jednego lub drugiego z nich

$|A|$ - liczba elementów zbioru A

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

$A \cup B$ - suma zbiorów A i B , czyli zbiór tych elementów, które należą do jednego lub drugiego z nich

$$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$|A|$ - liczba elementów zbioru A

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

$A \cup B$ - suma zbiorów A i B , czyli zbiór tych elementów, które należą do jednego lub drugiego z nich

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$$

$|A|$ - liczba elementów zbioru A

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

$A \cup B$ - suma zbiorów A i B , czyli zbiór tych elementów, które należą do jednego lub drugiego z nich

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$$

$A \cap B$ - część wspólna zbiorów A i B , czyli zbiór tych elementów, które należą zarówno do jednego jak i drugiego z nich

Definicje i oznaczenia

$|A|$ - liczba elementów zbioru A

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

$A \cup B$ - suma zbiorów A i B , czyli zbiór tych elementów, które należą do jednego lub drugiego z nich

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$$

$A \cap B$ - część wspólna zbiorów A i B , czyli zbiór tych elementów, które należą zarówno do jednego jak i drugiego z nich

$$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$$

$\lfloor x \rfloor$ to tzw. **podłoga** z liczby x , czyli jej zaokrąglenie „w dół”

$\lfloor x \rfloor$ to tzw. **podłoga** z liczby x , czyli jej zaokrąglenie „w dół”

$\lceil x \rceil$ to tzw. **sufit** z liczby x , czyli jej zaokrąglenie „w górę”

$\lfloor x \rfloor$ to tzw. **podłoga** z liczby x , czyli jej zaokrąglenie „w dół”

$\lceil x \rceil$ to tzw. **sufit** z liczby x , czyli jej zaokrąglenie „w górę”

$$\lfloor 2.57 \rfloor = 2 \qquad \lfloor \pi \rfloor = 3 \qquad \lfloor 12 \rfloor = 12$$

$$\lceil 2.57 \rceil = 3 \qquad \lceil \pi \rceil = 4 \qquad \lceil 12 \rceil = 12$$

ZASADA WŁĄCZEŃ I WYŁĄCZEŃ

Ile elementów ma suma zbiorów?

W pewnym koszu znajduje się 5 róż oraz 3 tulipany.
Ile kwiatów znajduje się w tym koszu?

Ile elementów ma suma zbiorów?

W pewnym koszu znajduje się 5 róż oraz 3 tulipany.
Ile kwiatów znajduje się w tym koszu?

$$5 \text{ róż} + 3 \text{ tulipany} = 8 \text{ kwiatów}$$

Ile elementów ma suma zbiorów?

W pewnym koszu znajduje się 5 róż oraz 3 tulipany.
Ile kwiatów znajduje się w tym koszu?

$$5 \text{ róż} + 3 \text{ tulipany} = 8 \text{ kwiatów}$$

W innym koszu znajduje się 5 róż oraz 3 czerwone kwiaty.
Ile kwiatów znajduje się w tym koszu?

Ile elementów ma suma zbiorów?

W pewnym koszu znajduje się 5 róż oraz 3 tulipany.
Ile kwiatów znajduje się w tym koszu?

$$5 \text{ róż} + 3 \text{ tulipany} = 8 \text{ kwiatów}$$

W innym koszu znajduje się 5 róż oraz 3 czerwone kwiaty.
Ile kwiatów znajduje się w tym koszu?

Nie wiadomo!

Ile elementów ma suma zbiorów?

W innym koszu znajduje się 5 róż oraz 3 czerwone kwiaty.
Ile kwiatów znajduje się w tym koszu?

Ile elementów ma suma zbiorów?

W innym koszu znajduje się 5 róż oraz 3 czerwone kwiaty.
Ile kwiatów znajduje się w tym koszu?

- Trzy róże są czerwone, a dwie żółte.

2 żółte róże + 3 czerwone róże + 0 czerwonych tulipanów =
5 kwiatów

Ile elementów ma suma zbiorów?

W innym koszu znajduje się 5 róż oraz 3 czerwone kwiaty.
Ile kwiatów znajduje się w tym koszu?

- Trzy róże są czerwone, a dwie żółte.

$2 \text{ żółte róże} + 3 \text{ czerwone róże} + 0 \text{ czerwonych tulipanów} =$
5 kwiatów

- Wszystkie róże są żółte.

$5 \text{ żółtych róż} + 0 \text{ czerwonych róż} + 3 \text{ czerwone tulipany} =$
8 kwiatów

Ile elementów ma suma zbiorów?

W innym koszu znajduje się 5 róż oraz 3 czerwone kwiaty.
Ile kwiatów znajduje się w tym koszu?

- Trzy róże są czerwone, a dwie żółte.

$2 \text{ żółte róże} + 3 \text{ czerwone róże} + 0 \text{ czerwonych tulipanów} = 5 \text{ kwiatów}$

- Wszystkie róże są żółte.

$5 \text{ żółtych róż} + 0 \text{ czerwonych róż} + 3 \text{ czerwone tulipany} = 8 \text{ kwiatów}$

- Jedna róża jest czerwona, a cztery żółte.

$4 \text{ żółte róże} + 1 \text{ czerwona róża} + 2 \text{ czerwone tulipany} = 7 \text{ kwiatów}$

Przypadek dwóch zbiorów.

Czy da się podać jakikolwiek wzór na licznosc sumy dwóch zbiorów?

Przypadek dwóch zbiorów.

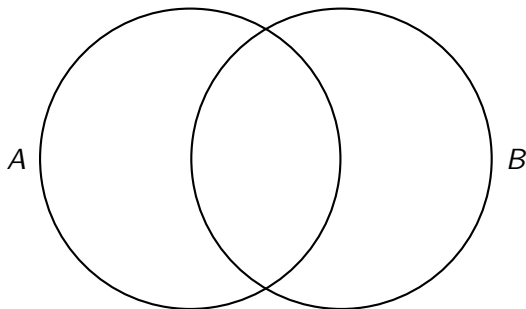
Czy da się podać jakikolwiek wzór na licznosc sumy dwóch zbiorów?

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Przypadek dwóch zbiorów.

Czy da się podać jakikolwiek wzór na licznosc sumy dwóch zbiorów?

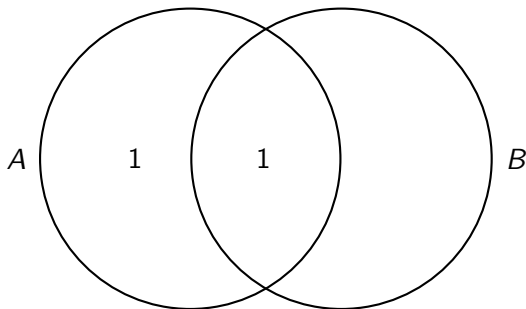
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Przypadek dwóch zbiorów.

Czy da się podać jakikolwiek wzór na licznosc sumy dwóch zbiorów?

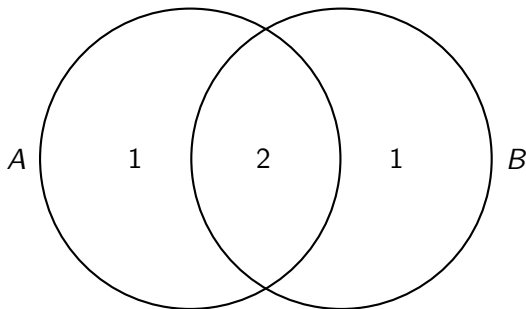
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Przypadek dwóch zbiorów.

Czy da się podać jakikolwiek wzór na licznosc sumy dwóch zbiorów?

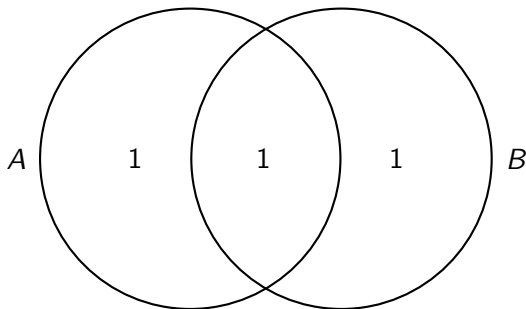
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Przypadek dwóch zbiorów.

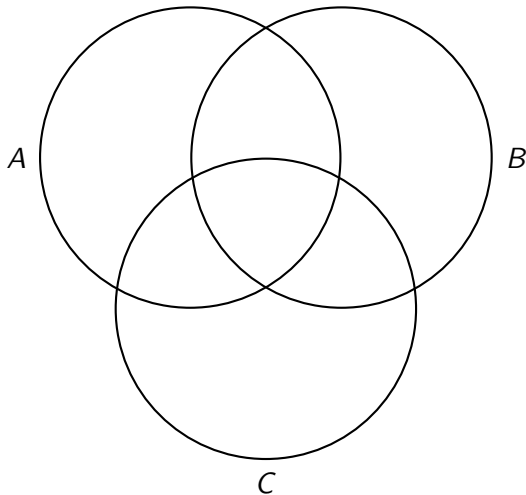
Czy da się podać jakikolwiek wzór na licznosc sumy dwóch zbiorów?

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



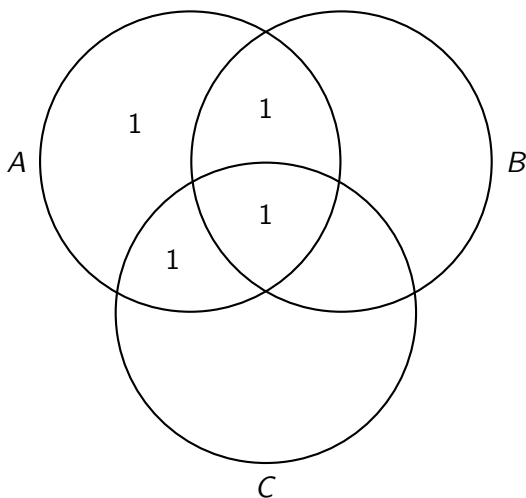
Przypadek trzech zbiorów

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



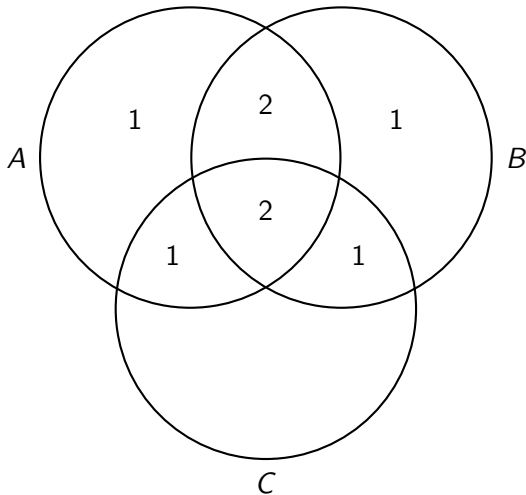
Przypadek trzech zbiorów

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



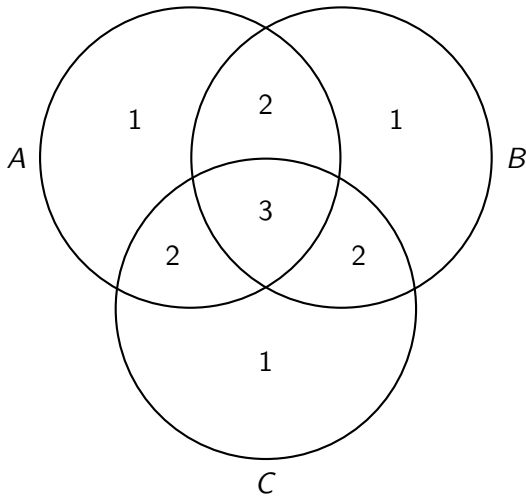
Przypadek trzech zbiorów

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



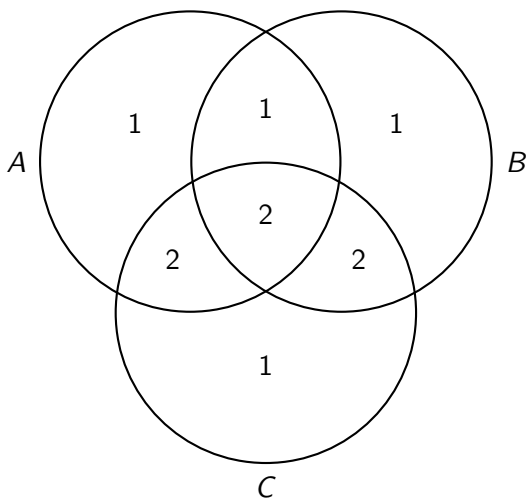
Przypadek trzech zbiorów

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



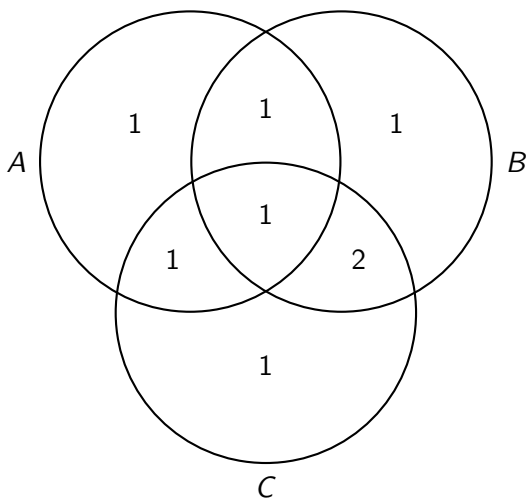
Przypadek trzech zbiorów

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



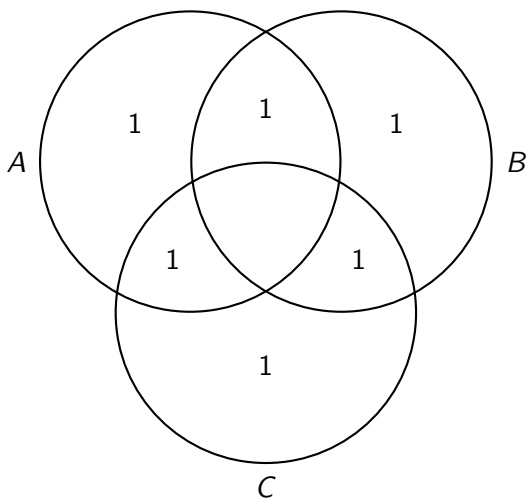
Przypadek trzech zbiorów

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



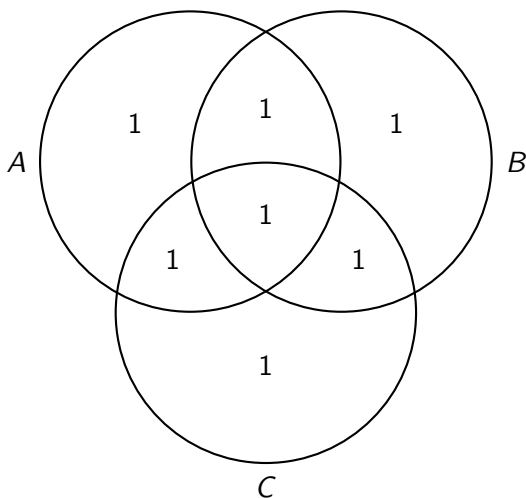
Przypadek trzech zbiorów

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Przypadek trzech zbiorów

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



$$\begin{aligned} & |A \cup B \cup C \cup D| = \\ & = |A| + |B| + |C| + |D| - \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - \\ & - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |A \cup B \cup C \cup D| = \\ & = (|A| + |B| + |C| + |D|) - \\ & - (|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|) + \\ & + (|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|) - \\ & - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \\ & = (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) - \\ & - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) + \\ & + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

I tak dalej...

$$S_1^{(4)} = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = \sum_{1 \leq i \leq 4} |A_i|$$

$$S_1^{(4)} = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = \sum_{1 \leq i_1 \leq 4} |A_{i_1}|$$

$$\begin{aligned} S_2^{(4)} &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \end{aligned}$$

$$S_1^{(4)} = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = \sum_{1 \leq i_1 \leq 4} |A_{i_1}|$$

$$\begin{aligned} S_2^{(4)} &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3^{(4)} &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \end{aligned}$$

$$S_1^{(4)} = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = \sum_{1 \leq i_1 \leq 4} |A_{i_1}|$$

$$\begin{aligned} S_2^{(4)} &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3^{(4)} &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \end{aligned}$$

$$S_4^{(4)} = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}|$$

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \\ & = (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) - \\ & - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) + \\ & + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =$$

$$= S_1^{(4)} -$$

$$-(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) +$$

$$+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) -$$

$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =$$

$$= S_1^{(4)} -$$

$$- S_2^{(4)} +$$

$$+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) -$$

$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= \\ &= S_1^{(4)} - \\ &\quad - S_2^{(4)} + \\ &\quad + S_3^{(4)} - \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =$$

$$= S_1^{(4)} -$$

$$- S_2^{(4)} +$$

$$+ S_3^{(4)} -$$

$$- S_4^{(4)}$$

I tak dalej...

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = S_1^{(4)} - S_2^{(4)} + S_3^{(4)} - S_4^{(4)}$$

I tak dalej...

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = S_1^{(4)} - S_2^{(4)} + S_3^{(4)} - S_4^{(4)} = \sum_{1 \leq k \leq 4} (-1)^{k+1} S_k^{(4)}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = S_1^{(4)} - S_2^{(4)} + S_3^{(4)} - S_4^{(4)} = \sum_{1 \leq k \leq 4} (-1)^{k+1} S_k^{(4)}$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = ?$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = S_1^{(4)} - S_2^{(4)} + S_3^{(4)} - S_4^{(4)} = \sum_{1 \leq k \leq 4} (-1)^{k+1} S_k^{(4)}$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = ?$$

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = S_1^{(4)} - S_2^{(4)} + S_3^{(4)} - S_4^{(4)} = \sum_{1 \leq k \leq 4} (-1)^{k+1} S_k^{(4)}$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)}$$

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Zastosowanie - problem roztargnionej sekretarki

Sekretarka wkłada n listów do n zaadresowanych już kopert.
Ponieważ jest roztargniona robi to zupełnie losowo.

Zastosowanie - problem roztargnionej sekretarki

Sekretarka wkłada n listów do n zaadresowanych już kopert.
Ponieważ jest roztargniona robi to zupełnie losowo.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden z adresatów nie dostanie właściwego listu?

Ω - zbiór wszystkich możliwych rozmieszczeń listów w kopertach
(zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych)

Ω - zbiór wszystkich możliwych rozmieszczeń listów w kopertach
(zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych)

A - zbiór tych rozmieszczeń, przy których żaden z adresatów nie dostaje właściwego listu

Ω - zbiór wszystkich możliwych rozmieszczeń listów w kopertach
(zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych)

A - zbiór tych rozmieszczeń, przy których żaden z adresatów nie dostaje właściwego listu

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ω - zbiór wszystkich możliwych rozmieszczeń listów w kopertach
(zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych)

A - zbiór tych rozmieszczeń, przy których żaden z adresatów nie dostaje właściwego listu

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n!}$$

A_i - zbiór tych rozmieszczeń, przy których i -ty adresat dostaje właściwy list

A_i - zbiór tych rozmieszczeń, przy których i -ty adresat dostaje właściwy list

$A_1 \cup \dots \cup A_n$ - zbiór tych rozmieszczeń, przy których przynajmniej jeden adresat dostaje właściwy list

A_i - zbiór tych rozmieszczeń, przy których i -ty adresat dostaje właściwy list

$A_1 \cup \dots \cup A_n$ - zbiór tych rozmieszczeń, przy których przynajmniej jeden adresat dostaje właściwy list

$$|A| = |\Omega| - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n|$$

A_i - zbiór tych rozmieszczeń, przy których i -ty adresat dostaje właściwy list

$A_1 \cup \dots \cup A_n$ - zbiór tych rozmieszczeń, przy których przynajmniej jeden adresat dostaje właściwy list

$$|A| = |\Omega| - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n|$$

Będziemy znajdować licznosci części wspólnych różnych zbiorów A_i , $i = 1, \dots, n$.

A_i - zbiór tych rozmieszczeń, przy których i -ty adresat dostaje właściwy list

$A_1 \cup \dots \cup A_n$ - zbiór tych rozmieszczeń, przy których przynajmniej jeden adresat dostaje właściwy list

$$|A| = |\Omega| - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n|$$

Będziemy znajdować licznosci części wspólnych różnych zbiorów A_i , $i = 1, \dots, n$.

Taka część wspólna to zbiór tych rozmieszczeń, przy których listy o takich numerach, jakie mają rozważane zbiory, trafiają do swoich kopert.

A_i - zbiór tych rozmieszczeń, przy których i -ty adresat dostaje właściwy list

$A_1 \cup \dots \cup A_n$ - zbiór tych rozmieszczeń, przy których przynajmniej jeden adresat dostaje właściwy list

$$|A| = |\Omega| - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n|$$

Będziemy znajdować licznosci części wspólnych różnych zbiorów A_i , $i = 1, \dots, n$.

Taka część wspólna to zbiór tych rozmieszczeń, przy których listy o takich numerach, jakie mają rozważane zbiory, trafiają do swoich kopert.

Np. $A_2 \cap A_5 \cap A_{17}$ to zbiór tych rozmieszczeń, przy których listy 2, 5 i 17 trafiły do odpowiedniej koperty.

$$|A_1| = (n - 1)!$$

$$|A_1| = (n - 1)!$$

Gdyż pierwszy list trafia do swojej koperty, zaklejamy ją, chowamy pod biurko i patrzymy na ile sposobów możemy rozmieścić pozostałe $n - 1$ listów w $n - 1$ pozostałych kopertach.

$$|A_1| = (n - 1)!$$

Gdyż pierwszy list trafia do swojej koperty, zaklejamy ją, chowamy pod biurko i patrzymy na ile sposobów możemy rozmieścić pozostałe $n - 1$ listów w $n - 1$ pozostałych kopertach.

$$|A_2| = (n - 1)!$$

$$|A_1| = (n - 1)!$$

Gdyż pierwszy list trafia do swojej koperty, zaklejamy ją, chowamy pod biurko i patrzymy na ile sposobów możemy rozmieścić pozostałe $n - 1$ listów w $n - 1$ pozostałych kopertach.

$$|A_2| = (n - 1)!$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = \dots = |A_n| = (n - 1)!$$

$$|A_1 \cap A_2| = (n - 2)!$$

$$|A_1 \cap A_2| = (n - 2)!$$

Bo pierwszy i drugi list trafiają do swoich kopert, zaklejamy je, chowamy pod biurko i patrzymy na ile sposobów możemy rozmieścić pozostałe $n - 2$ listów w $n - 2$ pozostałych kopertach.

$$|A_1 \cap A_2| = (n - 2)!$$

Bo pierwszy i drugi list trafiają do swoich kopert, zaklejamy je, chowamy pod biurko i patrzymy na ile sposobów możemy rozmieścić pozostałe $n - 2$ listów w $n - 2$ pozostałych kopertach.

Wynik znowu nie zależy od wyboru zbiorów!

$$|A_1 \cap A_2| = (n - 2)!$$

Bo pierwszy i drugi list trafiają do swoich kopert, zaklejamy je, chowamy pod biurko i patrzymy na ile sposobów możemy rozmieścić pozostałe $n - 2$ listów w $n - 2$ pozostałych kopertach.

Wynik znowu nie zależy od wyboru zbiorów!

Niech $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$.

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = (n - 2)!$$

Ogólnie część wspólna k zbiorów będzie miała...

Ogólnie część wspólna k zbiorów będzie miała...

$$(n - k)!$$

elementów.

Ogólnie część wspólna k zbiorów będzie miała...

$$(n - k)!$$

elementów.

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n - k)!$$

Aby skorzystać z zasady włączeń i wyłączeń musimy obliczyć wartości $S_k^{(n)}$ dla $k = 1, \dots, n$. Przykładowo zrobimy to dla $k = 2$.

Aby skorzystać z zasady włączeń i wyłączeń musimy obliczyć wartości $S_k^{(n)}$ dla $k = 1, \dots, n$. Przykładowo zrobimy to dla $k = 2$.

$$\begin{aligned} S_2^{(n)} &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \\ &= |A_1 \cap A_2| + \dots + |A_1 \cap A_n| + \\ &\quad + |A_2 \cap A_3| + \dots + |A_2 \cap A_n| + \dots + \\ &\quad + |A_{n-2} \cap A_{n-1}| + |A_{n-2} \cap A_n| + |A_{n-1} \cap A_n| \end{aligned}$$

Aby skorzystać z zasady włączeń i wyłączeń musimy obliczyć wartości $S_k^{(n)}$ dla $k = 1, \dots, n$. Przykładowo zrobimy to dla $k = 2$.

$$\begin{aligned} S_2^{(n)} &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \\ &= |A_1 \cap A_2| + \dots + |A_1 \cap A_n| + \\ &\quad + |A_2 \cap A_3| + \dots + |A_2 \cap A_n| + \dots + \\ &\quad + |A_{n-2} \cap A_{n-1}| + |A_{n-2} \cap A_n| + |A_{n-1} \cap A_n| = \\ &= \binom{n}{2} (n-2)! \end{aligned}$$

Aby skorzystać z zasady włączeń i wyłączeń musimy obliczyć wartości $S_k^{(n)}$ dla $k = 1, \dots, n$. Przykładowo zrobimy to dla $k = 2$.

$$\begin{aligned} S_2^{(n)} &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \\ &= |A_1 \cap A_2| + \dots + |A_1 \cap A_n| + \\ &\quad + |A_2 \cap A_3| + \dots + |A_2 \cap A_n| + \dots + \\ &\quad + |A_{n-2} \cap A_{n-1}| + |A_{n-2} \cap A_n| + |A_{n-1} \cap A_n| = \\ &= \binom{n}{2} (n-2)! = \frac{n!}{2!(n-2)!} (n-2)! = \frac{n!}{2!} \end{aligned}$$

I ogólnie

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k} (n-k)!$$

I ogólnie

$$\begin{aligned} S_k^{(n)} &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k} (n-k)! = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! \end{aligned}$$

I ogólnie

$$\begin{aligned} S_k^{(n)} &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k} (n-k)! = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! = \frac{n!}{k!} \end{aligned}$$

I ogólnie

$$\begin{aligned} S_k^{(n)} &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k} (n-k)! = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! = \frac{n!}{k!} \end{aligned}$$

Z zasady włączeń i wyłączeń zatem

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

$$|A| = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n! - \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

$$|A| = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n! - \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} =$$

$$= n! + \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+2} \frac{n!}{k!}$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

$$|A| = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n! - \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} =$$

$$= n! + \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+2} \frac{n!}{k!} = n! + \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

$$|A| = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n! - \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} =$$

$$= n! + \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+2} \frac{n!}{k!} = n! + \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!} =$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

$$|A| = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

$$|A| = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$|A| = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\left[\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!} &= (-1)^0 \frac{n!}{0!} + \dots + (-1)^k \frac{n!}{k!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!} &= n! \left(\frac{(-1)^0}{0!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \end{aligned} \right]$$

$$|A| = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\left[\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!} &= (-1)^0 \frac{n!}{0!} + \dots + (-1)^k \frac{n!}{k!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!} &= n! \left(\frac{(-1)^0}{0!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \end{aligned} \right]$$

$$P(A) = \frac{|A|}{n!} = \frac{n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}}{n!}$$

$$|A| = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\left[\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!} &= (-1)^0 \frac{n!}{0!} + \dots + (-1)^k \frac{n!}{k!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!} &= n! \left(\frac{(-1)^0}{0!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \end{aligned} \right]$$

$$P(A) = \frac{|A|}{n!} = \frac{n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}}{n!} = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$P(A) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$P(A) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$n = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 1 - 1 = 0$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$P(A) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$n = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 1 - 1 = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$P(A) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$n = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 1 - 1 = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$P(A) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$n = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 1 - 1 = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$n = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8}$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$\frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800}$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$\frac{1}{15!} = \frac{1}{1307674368000}$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

Liczba $e = 2,71\dots$ to jedna z najśłynniejszych liczb w matematyce. Nazywa się ją często liczbą Eulera.

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

Liczba $e = 2,71\dots$ to jedna z najśłynniejszych liczb w matematyce. Nazywa się ją często liczbą Eulera.

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

Liczba $e = 2,71\dots$ to jedna z najstąnniejszych liczb w matematyce. Nazywa się ją często liczbą Eulera.

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$$

$$n = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8} = 0,375$$

$$\frac{1}{e} = 0,3678\dots$$

Odpowiedź mamy, ale ile to jest mniej więcej?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

Liczba $e = 2,71\dots$ to jedna z najstąnniejszych liczb w matematyce. Nazywa się ją często liczbą Eulera.

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$$

$$n = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{53}{144} = 0,3680\dots$$

$$\frac{1}{e} = 0,3678\dots$$

ZASADA DWOISTOŚCI I DOWODY NIEMOŻLIWOŚCI

Łatwo dowieść, że $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, zwana złotą liczbą, jest liczbą algebraiczną, tzn. istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest φ .

Łatwo dowieść, że $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, zwana złotą liczbą, jest liczbą algebraiczną, tzn. istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest φ .

$$x^2 - x - 1$$

Łatwo dowieść, że $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, zwana złotą liczbą, jest liczbą algebraiczną, tzn. istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest φ .

$$x^2 - x - 1$$

Liczba π nie jest algebraiczna i wcale nie jest łatwo tego dowieść. Przecież wszystkich wielomianów ręcznie nie sprawdzimy.

Zasada dwoistości

Jak liczba jest parzysta, to nie jest nieparzysta.

Zasada dwoistości

Jak liczba jest parzysta, to nie jest nieparzysta.

Możliwe są inne wersje tej zasady...

Zasada dwoistości

Jak coś jest czarne, to nie jest białe.

Zasada dwoistości

Jak liczba jest parzysta, to nie jest nieparzysta.

Możliwe są inne wersje tej zasady...

Zasada dwoistości

Jak coś jest czarne, to nie jest białe.

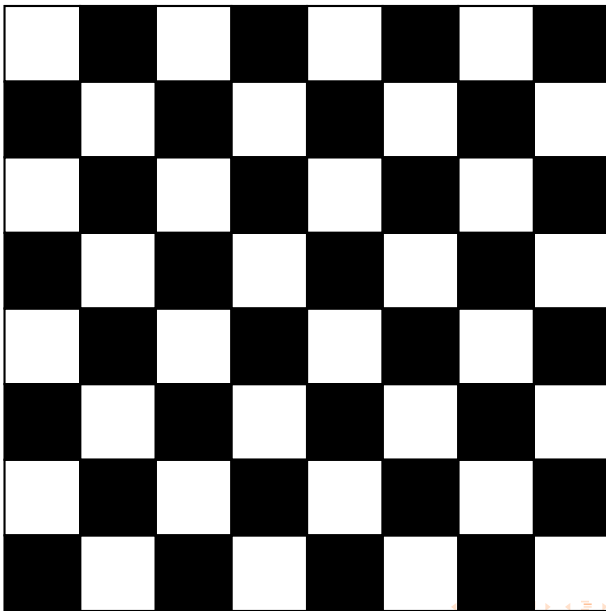
Zasada dwoistości

Jak liczba jest dodatnia, to nie jest ujemna.

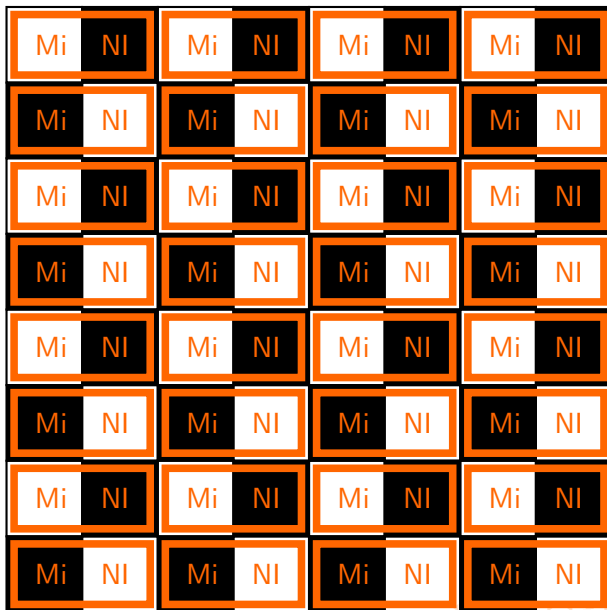
Itd., itp.

Czy da się pokryć szachownicę wymiaru $n \times n$ kostkami domina
(czyli takimi prostokącikami wymiaru 2×1)?

Gdy n jest parzyste, to się da.



Gdy n jest parzyste, to się da.



A gdy n jest nieparzyste...

...to się nie da, gdyż każda kostka domina pokrywa dwa pola.

A gdy n jest nieparzyste...

...to się nie da, gdyż każda kostka domina pokrywa dwa pola.

Tym samym liczba pól pokrytych przez p kostek domina wynosi $2p$, czyli jest parzysta.

A gdy n jest nieparzyste...

...to się nie da, gdyż każda kostka domina pokrywa dwa pola.

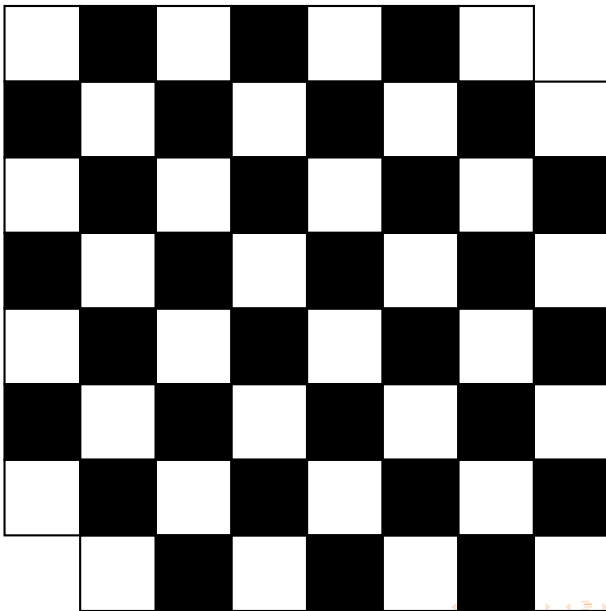
Tym samym liczba pól pokrytych przez p kostek domina wynosi $2p$, czyli jest parzysta.

A przecież liczba pól na szachownicy jest nieparzysta!

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Czy da się pokryć kostkami domina szachownicę wymiaru $n \times n$, której dwa przeciwległe pola narożne zostały odłamane?

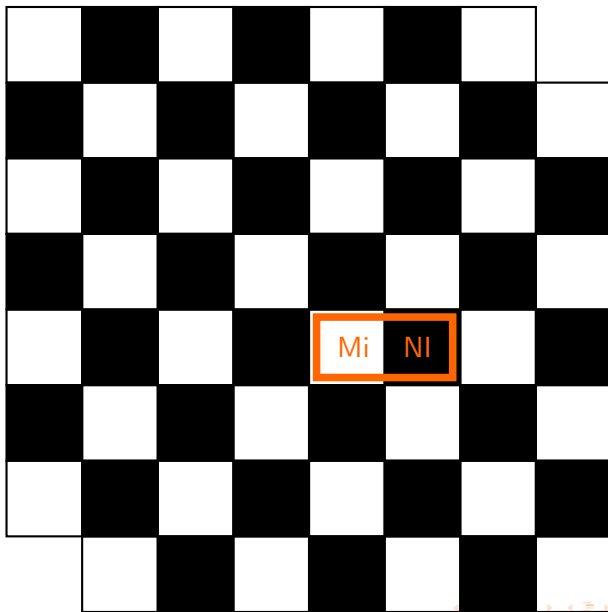
Uszkodzona szachownica



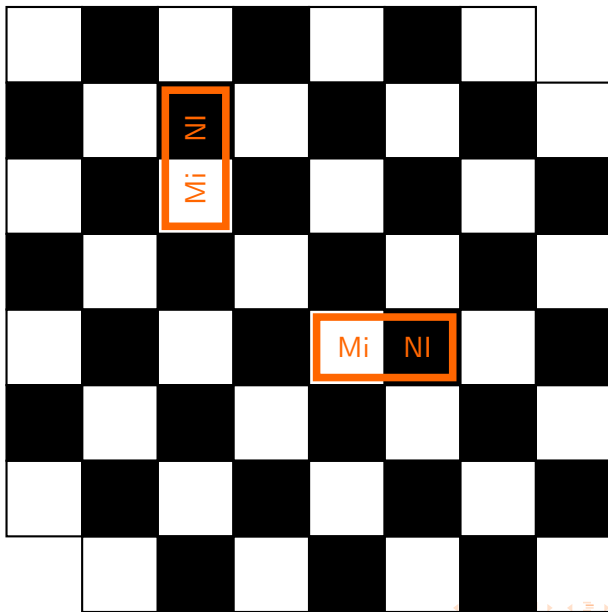
Gdy n jest nieparzyste, to się nie da...

...gdyż wtedy znowu jest na naszej szachownicy nieparzyście wiele pól.

Gdy n jest parzyste też się nie da!



Gdy n jest parzyste też się nie da!



ZASADA SZUFLADKOWA

Zasada szufladkowa

Jeśli do n szufladek włożymy (w dowolny sposób) m par skarpetek, to będzie szufladka, w której znajduje się co najwyżej $\lfloor m/n \rfloor$ par skarpetek oraz będzie taka szufladka, w której znajduje się co najmniej $\lceil m/n \rceil$ par skarpetek.

Zasada szufladkowa

Jeśli do n szufladek włożymy (w dowolny sposób) m par skarpetek, to będzie szufladka, w której znajduje się co najwyżej $\lfloor m/n \rfloor$ par skarpetek oraz będzie taka szufladka, w której znajduje się co najmniej $\lceil m/n \rceil$ par skarpetek.

Dowód

Założmy, że to nieprawda. Niech m_i oznacza liczbę par skarpetek znajdujących się w i -tej szufladce.

Zasada szufladkowa

Jeśli do n szufladek włożymy (w dowolny sposób) m par skarpetek, to będzie szufladka, w której znajduje się co najwyżej $\lfloor m/n \rfloor$ par skarpetek oraz będzie taka szufladka, w której znajduje się co najmniej $\lceil m/n \rceil$ par skarpetek.

Dowód

Założmy, że to nieprawda. Niech m_i oznacza liczbę par skarpetek znajdujących się w i -tej szufladce.

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

Zasada szufladkowa

Jeśli do n szufladek włożymy (w dowolny sposób) m par skarpetek, to będzie szufladka, w której znajduje się co najwyżej $\lfloor m/n \rfloor$ par skarpetek oraz będzie taka szufladka, w której znajduje się co najmniej $\lceil m/n \rceil$ par skarpetek.

Dowód

Założmy, że to nieprawda. Niech m_i oznacza liczbę par skarpetek znajdujących się w i -tej szufladce.

$$m = \sum_{i=1}^n m_i = m_1 + \dots + m_n$$

Zasada szufladkowa

Jeśli do n szufladek włożymy (w dowolny sposób) m par skarpetek, to będzie szufladka, w której znajduje się co najwyżej $\lfloor m/n \rfloor$ par skarpetek oraz będzie taka szufladka, w której znajduje się co najmniej $\lceil m/n \rceil$ par skarpetek.

Dowód

Założmy, że to nieprawda. Niech m_i oznacza liczbę par skarpetek znajdujących się w i -tej szufladce.

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \geq \sum_{i=1}^n \left(\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1 \right)$$

Zasada szufladkowa

Jeśli do n szufladek włożymy (w dowolny sposób) m par skarpetek, to będzie szufladka, w której znajduje się co najwyżej $\lfloor m/n \rfloor$ par skarpetek oraz będzie taka szufladka, w której znajduje się co najmniej $\lceil m/n \rceil$ par skarpetek.

Dowód

Założmy, że to nieprawda. Niech m_i oznacza liczbę par skarpetek znajdujących się w i -tej szufladce.

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \geq \sum_{i=1}^n \left(\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1 \right) > \sum_{i=1}^n \left(\frac{m}{n} - 1 + 1 \right)$$

Zasada szufladkowa

Jeśli do n szufladek włożymy (w dowolny sposób) m par skarpetek, to będzie szufladka, w której znajduje się co najwyżej $\lfloor m/n \rfloor$ par skarpetek oraz będzie taka szufladka, w której znajduje się co najmniej $\lceil m/n \rceil$ par skarpetek.

Dowód

Założmy, że to nieprawda. Niech m_i oznacza liczbę par skarpetek znajdujących się w i -tej szufladce.

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \geq \sum_{i=1}^n \left(\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1 \right) > \sum_{i=1}^n \left(\frac{m}{n} - 1 + 1 \right) = n \cdot \frac{m}{n}$$

Zasada szufladkowa

Jeśli do n szufladek włożymy (w dowolny sposób) m par skarpetek, to będzie szufladka, w której znajduje się co najwyżej $\lfloor m/n \rfloor$ par skarpetek oraz będzie taka szufladka, w której znajduje się co najmniej $\lceil m/n \rceil$ par skarpetek.

Dowód

Założmy, że to nieprawda. Niech m_i oznacza liczbę par skarpetek znajdujących się w i -tej szufladce.

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \geq \sum_{i=1}^n \left(\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1 \right) > \sum_{i=1}^n \left(\frac{m}{n} - 1 + 1 \right) = n \cdot \frac{m}{n} = m$$

Zasada szufladkowa

Jeśli do n szufladek włożymy (w dowolny sposób) m par skarpetek, to będzie szufladka, w której znajduje się co najwyżej $\lfloor m/n \rfloor$ par skarpetek oraz będzie taka szufladka, w której znajduje się co najmniej $\lceil m/n \rceil$ par skarpetek.

Dowód

Założmy, że to nieprawda. Niech m_i oznacza liczbę par skarpetek znajdujących się w i -tej szufladce.

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \geq \sum_{i=1}^n \left(\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1 \right) > \sum_{i=1}^n \left(\frac{m}{n} - 1 + 1 \right) = n \cdot \frac{m}{n} = m$$

Sprzeczność!

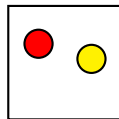
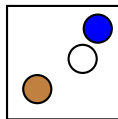
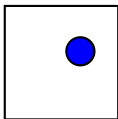
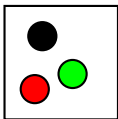
$$n = 4 \qquad m = 9 \qquad \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = 2 \qquad \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = 3$$

$$n = 4$$

$$m = 9$$

$$\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = 2$$

$$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = 3$$

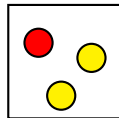
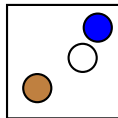
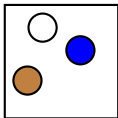
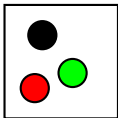


$$n = 4$$

$$m = 9$$

$$\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = 2$$

$$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = 3$$

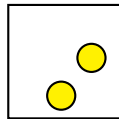
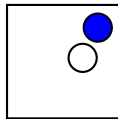
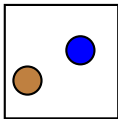
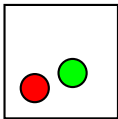


$$n = 4$$

$$m = 9$$

$$\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = 2$$

$$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = 3$$



Zasada szufladkowa najczęściej używana jest w przypadku $m = n + 1$.

Przypadek szczególny

Zasada szufladkowa najczęściej używana jest w przypadku $m = n + 1$.

$$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+1}{n} \right\rceil = \left\lceil 1 + \frac{1}{n} \right\rceil = 2$$

Przypadek szczególny

Zasada szufladkowa najczęściej używana jest w przypadku $m = n + 1$.

$$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+1}{n} \right\rceil = \left\lceil 1 + \frac{1}{n} \right\rceil = 2$$

Zasada szufladkowa, przypadek szczególny - nam najmiłszy

Jeśli do n szufladek włożymy (w dowolny sposób) $n + 1$ par skarpetek, to będzie szufladka, w której znajdują się co najmniej 2 pary skarpetek.

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$n = 3$$

2, 3, 5, 6

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$n = 3$$

2, 3, 5, 6

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$n = 3$$

2, 3, 5, 6

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$n = 3$$

2, 3, 5, 6

2, 3, 4, 5

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$n = 3$$

2, 3, 5, 6

2, 3, 4, 5

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$n = 3$$

2, 3, 5, 6

2, 3, 4, 5

$$n = 8$$

6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$n = 3$$

2, 3, 5, 6

2, 3, 4, 5

$$n = 8$$

6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

112

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28 = 2^3 \cdot 14$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28 = 2^3 \cdot 14 = 2^4 \cdot 7$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28 = 2^3 \cdot 14 = 2^4 \cdot 7$$

8

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28 = 2^3 \cdot 14 = 2^4 \cdot 7$$

$$8 = 2 \cdot 4$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28 = 2^3 \cdot 14 = 2^4 \cdot 7$$

$$8 = 2 \cdot 4 = 2^2 \cdot 2$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28 = 2^3 \cdot 14 = 2^4 \cdot 7$$

$$8 = 2 \cdot 4 = 2^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 1$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28 = 2^3 \cdot 14 = 2^4 \cdot 7$$

$$8 = 2 \cdot 4 = 2^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 1$$

26

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28 = 2^3 \cdot 14 = 2^4 \cdot 7$$

$$8 = 2 \cdot 4 = 2^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 1$$

$$26 = 2 \cdot 13$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28 = 2^3 \cdot 14 = 2^4 \cdot 7$$

$$8 = 2 \cdot 4 = 2^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 1$$

$$26 = 2 \cdot 13$$

11

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28 = 2^3 \cdot 14 = 2^4 \cdot 7$$

$$8 = 2 \cdot 4 = 2^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 1$$

$$26 = 2 \cdot 13$$

$$11 = 1 \cdot 11$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

$$112 = 2 \cdot 56 = 2^2 \cdot 28 = 2^3 \cdot 14 = 2^4 \cdot 7$$

$$8 = 2 \cdot 4 = 2^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 1$$

$$26 = 2 \cdot 13$$

$$11 = 1 \cdot 11 = 2^0 \cdot 11$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

Mamy dane liczby $a_1, \dots, a_{n+1}$. Wszystkie wybrane ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$.

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

Mamy dane liczby $a_1, \dots, a_{n+1}$. Wszystkie wybrane ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$.

$$a_i = 2^{k_i} \cdot l_i$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

Mamy dane liczby $a_1, \dots, a_{n+1}$. Wszystkie wybrane ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$.

$$a_i = 2^{k_i} \cdot l_i$$

$$l_i \in \{1, 3, 5, \dots, 2n - 3, 2n - 1\}$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

Mamy dane liczby $a_1, \dots, a_{n+1}$. Wszystkie wybrane ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$.

$$a_i = 2^{k_i} \cdot l_i$$

$$l_i \in \{1, 3, 5, \dots, 2n - 3, 2n - 1\}$$

Mamy n szufladek ponumerowanych liczbami nieparzystymi mniejszymi od $2n$. Liczbę a_i wrzucamy do szufladki l_i .

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

Mamy dane liczby $a_1, \dots, a_{n+1}$. Wszystkie wybrane ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$.

$$a_i = 2^{k_i} \cdot l_i$$

$$l_i \in \{1, 3, 5, \dots, 2n - 3, 2n - 1\}$$

Mamy n szufladek ponumerowanych liczbami nieparzystymi mniejszymi od $2n$. Liczbę a_i wrzucamy do szufladki l_i .

Ponieważ $n + 1$ liczb wrzuciliśmy do n szufladek, to musi istnieć szufladka l , do której wpadły dwie liczby - a_i i a_j .

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

Mamy dane liczby $a_1, \dots, a_{n+1}$. Wszystkie wybrane ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$.

$$a_i = 2^{k_i} \cdot l_i$$

$$l_i \in \{1, 3, 5, \dots, 2n - 3, 2n - 1\}$$

Mamy n szufladek ponumerowanych liczbami nieparzystymi mniejszymi od $2n$. Liczbę a_i wrzucamy do szufladki l_i .

Ponieważ $n + 1$ liczb wrzuciliśmy do n szufladek, to musi istnieć szufladka l , do której wpadły dwie liczby - a_i i a_j .

$$a_i = 2^{k_i} \cdot l \quad a_j = 2^{k_j} \cdot l$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

Jeśli $k_i < k_j$, to

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{2^{k_j} \cdot l}{2^{k_i} \cdot l} = 2^{k_j - k_i},$$

Zasada szufladkowa w akcji

Wśród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, \dots, 2n\}$ zawsze są dwie takie, że jedna z nich dzieli drugą.

Jeśli $k_i < k_j$, to

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{2^{k_j} \cdot l}{2^{k_i} \cdot l} = 2^{k_j - k_i},$$

czyli a_i dzieli a_j !

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

$$n = 3$$

1, 8, 4, 15, 9, 23, 3, 22, 12, 300

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

$$n = 3$$

1, 8, 4, 15, 9, 23, 3, 22, 12, 300

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

$$n = 3$$

1, 8, 4, 15, 9, 23, 3, 22, 12, 300

45, 46, 47, 23, 24, 25, 12, 13, 14, 5

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

$$n = 3$$

1, 8, 4, 15, 9, 23, 3, 22, 12, 300

45, 46, 47, 23, 24, 25, 12, 13, 14, 5

Twierdzenie Erdős-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

$$a_1, \dots, a_{n^2+1}$$

Twierdzenie Erdős-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

$$a_1, \dots, a_{n^2+1}$$

Każdemu wyrazowi a_i naszego ciągu przypiszmy parę liczb (r_i, m_i) w taki sposób, że:

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

$$a_1, \dots, a_{n^2+1}$$

Każdemu wyrazowi a_i naszego ciągu przypiszmy parę liczb (r_i, m_i) w taki sposób, że:

- r_i jest długością najdłuższego podciągu rosnącego kończącego się w a_i ;

Twierdzenie Erdős-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

$$a_1, \dots, a_{n^2+1}$$

Każdemu wyrazowi a_i naszego ciągu przypiszmy parę liczb (r_i, m_i) w taki sposób, że:

- r_i jest długością najdłuższego podciągu rosnącego kończącego się w a_i ;
- m_i jest długością najdłuższego podciągu malejącego kończącego się w a_i .

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (\quad , \quad) & (r_6, m_6) &= (\quad , \quad) \\(r_2, m_2) &= (\quad , \quad) & (r_7, m_7) &= (\quad , \quad) \\(r_3, m_3) &= (\quad , \quad) & (r_8, m_8) &= (\quad , \quad) \\(r_4, m_4) &= (\quad , \quad) & (r_9, m_9) &= (\quad , \quad) \\(r_5, m_5) &= (\quad , \quad) & (r_{10}, m_{10}) &= (\quad , \quad)\end{aligned}$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (1, \quad) & (r_6, m_6) &= (\quad, \quad) \\(r_2, m_2) &= (\quad, \quad) & (r_7, m_7) &= (\quad, \quad) \\(r_3, m_3) &= (\quad, \quad) & (r_8, m_8) &= (\quad, \quad) \\(r_4, m_4) &= (\quad, \quad) & (r_9, m_9) &= (\quad, \quad) \\(r_5, m_5) &= (\quad, \quad) & (r_{10}, m_{10}) &= (\quad, \quad)\end{aligned}$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (1, 1) & (r_6, m_6) &= (\quad , \quad) \\(r_2, m_2) &= (\quad , \quad) & (r_7, m_7) &= (\quad , \quad) \\(r_3, m_3) &= (\quad , \quad) & (r_8, m_8) &= (\quad , \quad) \\(r_4, m_4) &= (\quad , \quad) & (r_9, m_9) &= (\quad , \quad) \\(r_5, m_5) &= (\quad , \quad) & (r_{10}, m_{10}) &= (\quad , \quad)\end{aligned}$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (1, 1) & (r_6, m_6) &= (\quad , \quad) \\(r_2, m_2) &= (2, \quad) & (r_7, m_7) &= (\quad , \quad) \\(r_3, m_3) &= (\quad , \quad) & (r_8, m_8) &= (\quad , \quad) \\(r_4, m_4) &= (\quad , \quad) & (r_9, m_9) &= (\quad , \quad) \\(r_5, m_5) &= (\quad , \quad) & (r_{10}, m_{10}) &= (\quad , \quad)\end{aligned}$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$(r_1, m_1) = (1, 1) \quad (r_6, m_6) = (\quad , \quad)$$

$$(r_2, m_2) = (2, 1) \quad (r_7, m_7) = (\quad , \quad)$$

$$(r_3, m_3) = (\quad , \quad) \quad (r_8, m_8) = (\quad , \quad)$$

$$(r_4, m_4) = (\quad , \quad) \quad (r_9, m_9) = (\quad , \quad)$$

$$(r_5, m_5) = (\quad , \quad) \quad (r_{10}, m_{10}) = (\quad , \quad)$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (1, 1) & (r_6, m_6) &= (\quad , \quad) \\(r_2, m_2) &= (2, 1) & (r_7, m_7) &= (\quad , \quad) \\(r_3, m_3) &= (2, \quad) & (r_8, m_8) &= (\quad , \quad) \\(r_4, m_4) &= (\quad , \quad) & (r_9, m_9) &= (\quad , \quad) \\(r_5, m_5) &= (\quad , \quad) & (r_{10}, m_{10}) &= (\quad , \quad)\end{aligned}$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$(r_1, m_1) = (1, 1) \quad (r_6, m_6) = (\quad , \quad)$$

$$(r_2, m_2) = (2, 1) \quad (r_7, m_7) = (\quad , \quad)$$

$$(r_3, m_3) = (2, 2) \quad (r_8, m_8) = (\quad , \quad)$$

$$(r_4, m_4) = (\quad , \quad) \quad (r_9, m_9) = (\quad , \quad)$$

$$(r_5, m_5) = (\quad , \quad) \quad (r_{10}, m_{10}) = (\quad , \quad)$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (1, 1) & (r_6, m_6) &= (\quad , \quad) \\(r_2, m_2) &= (2, 1) & (r_7, m_7) &= (\quad , \quad) \\(r_3, m_3) &= (2, 2) & (r_8, m_8) &= (\quad , \quad) \\(r_4, m_4) &= (3, \quad) & (r_9, m_9) &= (\quad , \quad) \\(r_5, m_5) &= (\quad , \quad) & (r_{10}, m_{10}) &= (\quad , \quad)\end{aligned}$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$(r_1, m_1) = (1, 1) \quad (r_6, m_6) = (\quad , \quad)$$

$$(r_2, m_2) = (2, 1) \quad (r_7, m_7) = (\quad , \quad)$$

$$(r_3, m_3) = (2, 2) \quad (r_8, m_8) = (\quad , \quad)$$

$$(r_4, m_4) = (3, 1) \quad (r_9, m_9) = (\quad , \quad)$$

$$(r_5, m_5) = (\quad , \quad) \quad (r_{10}, m_{10}) = (\quad , \quad)$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$(r_1, m_1) = (1, 1) \quad (r_6, m_6) = (\quad , \quad)$$

$$(r_2, m_2) = (2, 1) \quad (r_7, m_7) = (\quad , \quad)$$

$$(r_3, m_3) = (2, 2) \quad (r_8, m_8) = (\quad , \quad)$$

$$(r_4, m_4) = (3, 1) \quad (r_9, m_9) = (\quad , \quad)$$

$$(r_5, m_5) = (3, \quad) \quad (r_{10}, m_{10}) = (\quad , \quad)$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$(r_1, m_1) = (1, 1) \quad (r_6, m_6) = (\quad , \quad)$$

$$(r_2, m_2) = (2, 1) \quad (r_7, m_7) = (\quad , \quad)$$

$$(r_3, m_3) = (2, 2) \quad (r_8, m_8) = (\quad , \quad)$$

$$(r_4, m_4) = (3, 1) \quad (r_9, m_9) = (\quad , \quad)$$

$$(r_5, m_5) = (3, 2) \quad (r_{10}, m_{10}) = (\quad , \quad)$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (1, 1) & (r_6, m_6) &= (4, \quad) \\(r_2, m_2) &= (2, 1) & (r_7, m_7) &= (\quad, \quad) \\(r_3, m_3) &= (2, 2) & (r_8, m_8) &= (\quad, \quad) \\(r_4, m_4) &= (3, 1) & (r_9, m_9) &= (\quad, \quad) \\(r_5, m_5) &= (3, 2) & (r_{10}, m_{10}) &= (\quad, \quad)\end{aligned}$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$(r_1, m_1) = (1, 1) \quad (r_6, m_6) = (4, 1)$$

$$(r_2, m_2) = (2, 1) \quad (r_7, m_7) = (\quad , \quad)$$

$$(r_3, m_3) = (2, 2) \quad (r_8, m_8) = (\quad , \quad)$$

$$(r_4, m_4) = (3, 1) \quad (r_9, m_9) = (\quad , \quad)$$

$$(r_5, m_5) = (3, 2) \quad (r_{10}, m_{10}) = (\quad , \quad)$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$(r_1, m_1) = (1, 1) \quad (r_6, m_6) = (4, 1)$$

$$(r_2, m_2) = (2, 1) \quad (r_7, m_7) = (2, \quad)$$

$$(r_3, m_3) = (2, 2) \quad (r_8, m_8) = (\quad, \quad)$$

$$(r_4, m_4) = (3, 1) \quad (r_9, m_9) = (\quad, \quad)$$

$$(r_5, m_5) = (3, 2) \quad (r_{10}, m_{10}) = (\quad, \quad)$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (1, 1) & (r_6, m_6) &= (4, 1) \\(r_2, m_2) &= (2, 1) & (r_7, m_7) &= (2, 3) \\(r_3, m_3) &= (2, 2) & (r_8, m_8) &= (\quad , \quad) \\(r_4, m_4) &= (3, 1) & (r_9, m_9) &= (\quad , \quad) \\(r_5, m_5) &= (3, 2) & (r_{10}, m_{10}) &= (\quad , \quad)\end{aligned}$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$(r_1, m_1) = (1, 1) \quad (r_6, m_6) = (4, 1)$$

$$(r_2, m_2) = (2, 1) \quad (r_7, m_7) = (2, 3)$$

$$(r_3, m_3) = (2, 2) \quad (r_8, m_8) = (4, \quad)$$

$$(r_4, m_4) = (3, 1) \quad (r_9, m_9) = (\quad, \quad)$$

$$(r_5, m_5) = (3, 2) \quad (r_{10}, m_{10}) = (\quad, \quad)$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$(r_1, m_1) = (1, 1) \quad (r_6, m_6) = (4, 1)$$

$$(r_2, m_2) = (2, 1) \quad (r_7, m_7) = (2, 3)$$

$$(r_3, m_3) = (2, 2) \quad (r_8, m_8) = (4, 2)$$

$$(r_4, m_4) = (3, 1) \quad (r_9, m_9) = (\quad , \quad)$$

$$(r_5, m_5) = (3, 2) \quad (r_{10}, m_{10}) = (\quad , \quad)$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$(r_1, m_1) = (1, 1) \quad (r_6, m_6) = (4, 1)$$

$$(r_2, m_2) = (2, 1) \quad (r_7, m_7) = (2, 3)$$

$$(r_3, m_3) = (2, 2) \quad (r_8, m_8) = (4, 2)$$

$$(r_4, m_4) = (3, 1) \quad (r_9, m_9) = (4, \quad)$$

$$(r_5, m_5) = (3, 2) \quad (r_{10}, m_{10}) = (\quad, \quad)$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (1, 1) & (r_6, m_6) &= (4, 1) \\(r_2, m_2) &= (2, 1) & (r_7, m_7) &= (2, 3) \\(r_3, m_3) &= (2, 2) & (r_8, m_8) &= (4, 2) \\(r_4, m_4) &= (3, 1) & (r_9, m_9) &= (4, 3) \\(r_5, m_5) &= (3, 2) & (r_{10}, m_{10}) &= (\quad , \quad)\end{aligned}$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (1, 1) & (r_6, m_6) &= (4, 1) \\(r_2, m_2) &= (2, 1) & (r_7, m_7) &= (2, 3) \\(r_3, m_3) &= (2, 2) & (r_8, m_8) &= (4, 2) \\(r_4, m_4) &= (3, 1) & (r_9, m_9) &= (4, 3) \\(r_5, m_5) &= (3, 2) & (r_{10}, m_{10}) &= (5, \quad)\end{aligned}$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (1, 1) & (r_6, m_6) &= (4, 1) \\(r_2, m_2) &= (2, 1) & (r_7, m_7) &= (2, 3) \\(r_3, m_3) &= (2, 2) & (r_8, m_8) &= (4, 2) \\(r_4, m_4) &= (3, 1) & (r_9, m_9) &= (4, 3) \\(r_5, m_5) &= (3, 2) & (r_{10}, m_{10}) &= (5, 1)\end{aligned}$$

Zasada szufladkowa w akcji II

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	8	4	15	9	23	3	22	12	300

$$\begin{aligned}(r_1, m_1) &= (1, 1) & (r_6, m_6) &= (4, 1) \\(r_2, m_2) &= (2, 1) & (r_7, m_7) &= (2, 3) \\(r_3, m_3) &= (2, 2) & (r_8, m_8) &= (4, 2) \\(r_4, m_4) &= (3, 1) & (r_9, m_9) &= (4, 3) \\(r_5, m_5) &= (3, 2) & (r_{10}, m_{10}) &= (5, 1)\end{aligned}$$

Czy to przypadek, że wszystkie te pary są różne?

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Niech a_i oraz a_j będą dwoma wyrazami naszego ciągu takimi, że $i < j$, czyli a_i występuje wcześniej w ciągu niż a_j .

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Niech a_i oraz a_j będą dwoma wyrazami naszego ciągu takimi, że $i < j$, czyli a_i występuje wcześniej w ciągu niż a_j . Załóżmy, że $a_i < a_j$.

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Niech a_i oraz a_j będą dwoma wyrazami naszego ciągu takimi, że $i < j$, czyli a_i występuje wcześniej w ciągu niż a_j . Załóżmy, że $a_i < a_j$.

Wtedy każdy podciąg rosnący kończący się w a_i możemy przedłużyć o a_j .

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Niech a_i oraz a_j będą dwoma wyrazami naszego ciągu takimi, że $i < j$, czyli a_i występuje wcześniej w ciągu niż a_j . Załóżmy, że $a_i < a_j$.

Wtedy każdy podciąg rosnący kończący się w a_i możemy przedłużyć o a_j .

Czyli $r_j \geq r_i + 1$, a to oznacza, że pary (r_i, m_i) oraz (r_j, m_j) różnią się na pierwszej współrzędnej.

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Niech a_i oraz a_j będą dwoma wyrazami naszego ciągu takimi, że $i < j$, czyli a_i występuje wcześniej w ciągu niż a_j . Załóżmy, że $a_i < a_j$.

Wtedy każdy podciąg rosnący kończący się w a_i możemy przedłużyć o a_j .

Czyli $r_j \geq r_i + 1$, a to oznacza, że pary (r_i, m_i) oraz (r_j, m_j) różnią się na pierwszej współrzędnej.

Jeśli $a_i > a_j$, to każdy podciąg malejący kończący się w a_i można przedłużyć o a_j i pary (r_i, m_i) oraz (r_j, m_j) różnią się na drugiej współrzędnej.

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Jeśli wszystkie r_i oraz wszystkie m_i byłyby mniejsze lub równe n , to wszystkich możliwych par byłoby n^2 , gdyż każda z dwóch współrzędnych mogłaby przyjąć wartości $1, \dots, n$.

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Jeśli wszystkie r_i oraz wszystkie m_i byłyby mniejsze lub równe n , to wszystkich możliwych par byłoby n^2 , gdyż każda z dwóch współrzędnych mogłaby przyjąć wartości $1, \dots, n$.

Ale my mamy $n^2 + 1$ par, bo tyle liczb jest w naszym ciągu.

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Jeśli wszystkie r_i oraz wszystkie m_i byłyby mniejsze lub równe n , to wszystkich możliwych par byłoby n^2 , gdyż każda z dwóch współrzędnych mogłaby przyjąć wartości $1, \dots, n$.

Ale my mamy $n^2 + 1$ par, bo tyle liczb jest w naszym ciągu.

Z zasady szufladkowej zatem istniałyby dwie liczby w naszym ciągu, których pary (r_i, m_i) byłyby takie same.

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Jeśli wszystkie r_i oraz wszystkie m_i byłyby mniejsze lub równe n , to wszystkich możliwych par byłoby n^2 , gdyż każda z dwóch współrzędnych mogłaby przyjąć wartości $1, \dots, n$.

Ale my mamy $n^2 + 1$ par, bo tyle liczb jest w naszym ciągu.

Z zasady szufladkowej zatem istniałyby dwie liczby w naszym ciągu, których pary (r_i, m_i) byłyby takie same.

Ale przed chwilą pokazaliśmy, że to jest niemożliwe!

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Jeśli wszystkie r_i oraz wszystkie m_i byłyby mniejsze lub równe n , to wszystkich możliwych par byłoby n^2 , gdyż każda z dwóch współrzędnych mogłaby przyjąć wartości $1, \dots, n$.

Ale my mamy $n^2 + 1$ par, bo tyle liczb jest w naszym ciągu.

Z zasady szufladkowej zatem istniałyby dwie liczby w naszym ciągu, których pary (r_i, m_i) byłyby takie same.

Ale przed chwilą pokazaliśmy, że to jest niemożliwe!

Zatem któreś r_i lub któreś m_i musi być równe co najmniej $n + 1$.

Zasada szufladkowa w akcji II

Twierdzenie Erdősa-Szekeres

Każdy ciąg złożony z $n^2 + 1$ różnych liczb zawiera podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n + 1$.

Jeśli wszystkie r_i oraz wszystkie m_i byłyby mniejsze lub równe n , to wszystkich możliwych par byłoby n^2 , gdyż każda z dwóch współrzędnych mogłaby przyjąć wartości $1, \dots, n$.

Ale my mamy $n^2 + 1$ par, bo tyle liczb jest w naszym ciągu.

Z zasady szufladkowej zatem istniałyby dwie liczby w naszym ciągu, których pary (r_i, m_i) byłyby takie same.

Ale przed chwilą pokazaliśmy, że to jest niemożliwe!

Zatem któreś r_i lub któreś m_i musi być równe co najmniej $n + 1$.

A to oznacza, że istnieje w naszym ciągu odpowiednio długi podciąg monotoniczny :).

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ