Leszek Sidz. Miniakademia, 2.03.2013. Niezmienniki.

1. Na tablicy napisano pewną liczbę zer, jedynek i dwójek. Wolno zetrzeć dwie różne cyfry i wpisać w ich miejsce cyfrę różną od nich. Udowodnij, że jeżeli na końcu zostaje jedna cyfra, to nie zależy ona od porządku ścierania. Czy zawsze można osiągnąć jedną cyfrę ?
2. Na wyspie jest 17 czerwonych, 15 zielonych , 13 niebieskich kameleonów. Gdy spotykają się dwa kameleony różnych barw, przyjmują trzeci kolor . Czy w wyniku takiej ewolucji mogą zostać na wyspie wszystkie kameleony tego samego koloru ?
3. Wokół polany rośnie 90 drzew. Na każdym siedzi 1 małpa. Co minutę 2 małpy przeskakują na sąsiednie drzewo, ale każda z nich w innym kierunku. Czy może dojść do sytuacji, że wszystkie małpy będą na jednym drzewie ?
4. Dana jest szachownica. Możemy w pojedynczym ruchu zmienić kolor wszystkich pól jednej linii pionowej lub poziomej. Czy można uzyskać szachownicę z jednym czarnym polem ?
5. Dana jest szachownica. Można zmienić kolor wszystkich pól w kwadracie 2 na 2. Czy można w ten sposób otrzymać szachownicę z jednym białym polem ?
6. W polach tablicy 4 na 4 umieszczono liczbę -1 i 15 liczb $+1$. Można zmienić jednocześnie znaki liczb w jednej kolumnie lub w jednym wierszu. Czy można uzyskać tablicę z samymi jedynkami ?
7. Na szachownicy 9 na 9 stoi 9 wież , z których żadna nie zagraża innej. Każdą wieżę przestawiamy ruchem konika szachowego. Udowodnij, że teraz będą dwie wieże zagrażające sobie.
8. W każdym polu tablicy 8 na 8 napisano liczbę całkowitą. Można wybrać kwadrat 3 na 3 lub 4 na 4 i zwiększyć o 1 wszystkie liczby w kwadracie. Czy można doprowadzić do sytuacji, że wszystkie liczby będą dzielić się przez 3 ?
9. Piszemy liczby 1,2,3,....,n w dowolnym porządku. Można zamienić dwie sąsiednie liczby. Czy można po nieparzystej liczbie operacji wrócić do wyjściowego porządku ?
10. Zadanie poprzednie, ale możemy zamienić miejscami dowolne dwie liczby.
11. Na okrągłym torze wyścigowym stoi w różnych miejscach 25 aut. W tym samym momencie ruszają w tę samą stronę. Można wyprzedzać, ale zabronione jest wyprzedzanie podwójne. Okazało się , że po pewnym czasie auta zatrzymały się w jednocześnie i każde auto w punkcie swojego startu. Udowodnij, że była parzysta liczba wyprzedzeń.
12. Okrąg podzielono średnicami na 10 sektorów. W każdym sektorze został położony żeton. W jednym ruchu przesuwamy jeden (dowolnie wybrany) żeton do następnego sektora zgodnie z ruchem wskazówek zegara, oraz jeden (dowolnie wybrany) żeton do następnego sektora przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Czy istnieje skończona liczba ruchów po których wszystkie żetony znajdą się w jednym sektorze?
13. W każdym polu szachownicy m na n zapisano jedna liczbę rzeczywista. Możemy wykonać następującą operację: zmieniamy znaki wszystkich liczb stojących w jednym, wybranym przez nas wierszu lub w wybranej przez nas kolumnie. Czy zawsze można, przy pomocy skończonej liczby operacji, doprowadzić do sytuacji, w której suma liczb stojących w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest nieujemna?
14. Na okręgu napisano n liczb naturalnych. Miedzy każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik, po czym wcześniej zapisane liczby ścieramy. Z nowo otrzymanymi n liczbami postępujemy analogicznie. Udowodnić, ze po pewnej, skończonej liczbie takich operacji wszystkie liczby na okręgu będą równe.

15. Na dworze króla Artura przebywa 2n rycerzy, z których każdy ma co najwyżej n - 1 wrogów. Udowodnić, ze można ich usadzić wokół okrągłego stołu tak, aby żaden nie siedział obok swojego wroga.
16. Na płaszczyźnie mamy n punktów, żadne trzy nie są współliniowe, oraz n prostych, żadne dwie nie są równoległe. Udowodnić, że można poprowadzić z tych punktów odcinki prostopadłe do tych prostych (na każdą prostą jeden), tak, aby odcinki te nie przecinały się.
17. Na okręgu rozmieszczono n liczb. Jeżeli kolejno stoją liczby a,b , c, d i zachodzi warunek (a-d)(b-c)>0, to liczby b i c można zamienić. Udowodnij, że po pewnej ilości zamian nie będziemy mogli wykonać ruchu.
18. Dany jest nie wypukły wielokąt. Jeżeli leży on po jednej stronie prostej AB, gdzie A , B nie sąsiednie wierzchołki, to jedną z części wielokąta , na które dzieli go AB , odbijamy symetrycznie względem AB. Udowodnij, że po pewnej ilości operacji otrzymamy wielokąt wypukły.
19. W sejmie każdy poseł ma nie więcej niż 3 wrogów. Udowodnić , że można ich podzielić na dwie grupy tak, aby w grupie każdy poseł miał co najwyżej jednego wroga.
20. Na tablicy napisano N liczb, każda równa 1 lub –1. W jednym ruchu można zmienić znak kilku liczb stojących obok siebie. W jakiej najmniejszej liczbie ruchów można uzyskać układ samych jedynek ?
21. Na nieskończonej szachownicy prostokąt 3k na n zapełniono pionkami. W grze można przeskoczyć pionkiem inny pionek (w wierszu lub kolumnie) , jeżeli za nim jest wolne pole. Zdejmujemy wtedy przeskoczony pionek. Czy można uzyskać szachownicę z jednym pionkiem ?
22. Dany jest wypukły 2m-kąt. A(1),A(20,..A(2m). Wewnątrz wybieramy punkt P, który nie leży na żadnej z przekątnych. Udowodnij, że P należy do parzystej ilości trójkątów z wierzchołkami z punktów A(i).
23. Kwadratowe pole podzielono na 100 jednakowych kwadracików. 9 z nich obsiano makiem. Przez rok mak rozsiewa się na pola, które mają co najmniej dwa boki wspólne z już zarośniętym poletkiem. I tylko na te. Udowodnij, że pole nigdy nie zarośnie całe makiem.
24. Na tablicy napisano liczby 1; 2; :::; n. Możemy wymazać dwie dowolne liczby a i b, a następnie dopisać liczbę ab + a + b. Znaleźć liczbę, która zostanie na tablicy po n -1 takich operacjach.
25. Na tablicy znajduje się n liczb. W jednym kroku można usunąć dowolne dwie liczby, a i b, a następnie zamiast nich napisać liczbę (a+b)/4. Udowodnić, że jeżeli na początku na tablicy znajdowały się same jedynki, to po n -1 operacjach została liczba nie mniejsza niż 1/n.
26. (a) W wierzchołku A1 dwunastokąta foremnego A1A2:::A12 postawiono znak (+), w pozostałych zaś wierzchołkach znak (-). Możemy zmieniać znaki na przeciwne jednocześnie w dowolnych sześciu kolejnych wierzchołkach dwunastokąta. Pokazać, że za pomocą wielokrotnego stosowania tej operacji nie można doprowadzić do tego, by przy wierzchołku A2 był znak (+), a przy pozostałych wierzchołkach znak (-). (b) Udowodnić to samo twierdzenie dla operacji polegającej na jednoczesnej zmianie znaków na przeciwne w dowolnych czterech kolejnych wierzchołkach dwunastokąta. (c) Udowodnić to samo twierdzenie dla sytuacji, gdy znaki zmieniamy w trzech kolejnych wierzchołkach.
27. Na tablicy napisano liczby od 1 do 2008. Co sekundę możemy wymazać 4 liczby postaci a; b; c; a+b+c i zastapić je liczbami a+b; b+c; c+a. Udowodnić, że operacje możemy powtarzać nie dłużej niż 10 minut.

28. (CzPolSł Z.M. 2011) Na tablicy napisano n nieujemnych liczb całkowitych, których największy wspólny dzielnik wynosi 1. W jednym kroku można zmazać dwie liczby x; y takie, że x -y jest nieujemne oraz zastąpić je liczbami x- y; 2y. Rozstrzygnąć, dla jakich początkowych ciągów liczb całkowitych można doprowadzić do sytuacji, w której n - 1 liczb na tablicy jest zerami.

Literatura.

1. I. Jonin, L. Kurliandtchik, "Poszukiwanie niezmienników", Kwant 2/1976, str. 32-35.
2. L. Kurliandtchik, D. Fomin, „Etiudy o półniezmienniku“ , Kwant 7/1989, str . 63-68.
3. V. Prasołow, Zadaczi po płanimetrii, Hauka, Moskwa, 1986.
4. I. Sergejev, Zarubieżne Matematiczeskije Olimpiady, Moskwa 1987.