Niezmienniki i półniezmienniki w zadaniach

Krzysztof Chełmiński

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Politechnika Warszawska

MiNI-Akademia Matematyki

Warszawa, 2 marca, 2013

Na czym polega metoda niezmienników?

Jeżeli w rozważanym problemie występuje pewien proces,

to aby go lepiej zrozumieć, warto

szukać niezmienników tego procesu.

Co to jest niezmiennik procesu?

Niezmiennik procesu to pewna wielkość lub własność,

która się nie zmienia podczas trwania tego procesu.

Kilka zadań rozwiązanych metodą niezmienników

Zadanie 1

Pola szachownicy wymiaru $2n \times 2n$ *gdzie* n *jest pewną liczbą naturalną zostały pomalowane na jeden z dwóch kolorów czerwony lub zielony przy czym* $2n^2 + 1$ *pól zostało pomalowanych na czerwono i* $2n^2 - 1$ *na zielono. Wybieramy dwa dowolne pola i jeżeli oba wybrane pola są czerwone to jednego pola nie zmieniamy a drugie ścieramy i zostawiamy niepomalowane, jeżeli oba wybrane pola są zielone to zmieniamy jedno z nich na czerwone a drugie ścieramy i jeżeli wybrane pola są różnych kolorów to zostawiamy pole zielone a drugie ścieramy. Jakiego koloru pole zostaje po wykonaniu* $4n^2 - 1$ *kroków?*

Kilka zadań rozwiązanych metodą niezmienników

Zadanie 1

Pola szachownicy wymiaru $2n \times 2n$ gdzie n jest pewną liczbą naturalną zostały pomalowane na jeden z dwóch kolorów czerwony lub zielony przy czym $2n^2+1$ pól zostało pomalowanych na czerwono i $2n^2-1$ na zielono. Wybieramy dwa dowolne pola i jeżeli oba wybrane pola są czerwone to jednego pola nie zmieniamy a drugie ścieramy i zostawiamy niepomalowane, jeżeli oba wybrane pola są zielone to zmieniamy jedno z nich na czerwone a drugie ścieramy i jeżeli wybrane pola są różnych kolorów to zostawiamy pole zielone a drugie ścieramy. Jakiego koloru pole zostaje po wykonaniu $4n^2-1$ kroków?

Pierwsze rozwiązanie

Zauważamy, że po wykonaniu dozwolonej zmiany liczba zielonych pól albo się nie zmienia albo zmniejsza się o dwa. Stąd parzystość ilości pól zielonych jest niezmiennikiem opisanego procesu. Na początku mamy nieparzystą liczbę pól zielonych co oznacza, że po wykonaniu $4n^2-1$ kroków, gdy na szachownicy zostaje tylko jedno pomalowane pole musi być ono koloru zielonego.

Zadanie 1

Pola szachownicy wymiaru $2n \times 2n$ gdzie n jest pewną liczbą naturalną zostały pomalowane na jeden z dwóch kolorów czerwony lub zielony przy czym $2n^2 + 1$ pól zostało pomalowanych na czerwono i $2n^2 - 1$ na zielono. Wybieramy dwa dowolne pola i jeżeli oba wybrane pola są czerwone to jednego pola nie zmieniamy a drugie ścieramy i zostawiamy niepomalowane, jeżeli oba wybrane pola są zielone to zmieniamy jedno z nich na czerwone a drugie ścieramy i jeżeli wybrane pola są różnych kolorów to zostawiamy pole zielone a drugie ścieramy. Jakiego koloru pole zostaje po wykonaniu $4n^2 - 1$ kroków?

Drugie rozwiązanie

Napiszmy na wszystkich czerwonych polach liczbę 1 a na polach zielonych liczbę -1. Zauważamy, że po wykonaniu dozwolonej zmiany zamiast dwóch wybranych liczb zostawiamy ich iloczyn. Oznacza to, że iloczyn wszystkich liczb umieszczonych na pomalowanych polach się nie zmienia. Na początku iloczyn wszystkich liczb stojących na pomalowanych polach wynosi -1 co oznacza, że powykonaniu $4n^2 - 1$ zmian na szachownicy musi zostać pole z liczbą -1 czyli pole zielone.

Zadanie 1

Pola szachownicy wymiaru $2n \times 2n$ gdzie n jest pewną liczbą naturalną zostały pomalowane na jeden z dwóch kolorów czerwony lub zielony przy czym $2n^2+1$ pól zostało pomalowanych na czerwono i $2n^2-1$ na zielono. Wybieramy dwa dowolne pola i jeżeli oba wybrane pola są czerwone to jednego pola nie zmieniamy a drugie ścieramy i zostawiamy niepomalowane, jeżeli oba wybrane pola są zielone to zmieniamy jedno z nich na czerwone a drugie ścieramy i jeżeli wybrane pola są różnych kolorów to zostawiamy pole zielone a drugie ścieramy. Jakiego koloru pole zostaje po wykonaniu $4n^2-1$ kroków?

Trzecie rozwiązanie

Na polach czerwonych wpisujemy zera a na polach zielonych jedynki. Zauważmy, że po wykonaniu dozwolonej zmiany zamiast wybranych dwóch pól pojawia się pole z liczbą będącą resztą z dzielenia przez dwa sumy liczb stojących na wybranych polach. Niezmiennikiem naszego procesu jest więc reszta z dzielenia przez dwa sumy wszystkich liczb stojących na pomalowanych polach. Na początku reszta ta wynosi 1 więc na końcu musi zostać pole z napisaną jedynką, czyli pole zielone.

Zadanie 2

Na tablicy napisano liczby $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{2013}$. *W jednym ruchu wybieramy dowolne dwie liczby* a *i* b, *ścieramy je i zamiast nich wpisujemy liczbę równą* $a+b+ab$. *Jaką liczbę możemy otrzymać po wykonaniu* 2012 *ruchów?*

Zadanie 2

Na tablicy napisano liczby $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{2013}$. *W jednym ruchu wybieramy dowolne dwie liczby* a *i* b, *ścieramy je i zamiast nich wpisujemy liczbę równą* $a+b+ab$. *Jaką liczbę możemy otrzymać po wykonaniu* 2012 *ruchów?*

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez $a \star b$ liczbę równą $a + b + ab$. Wtedy zauważamy, że po wykonaniu dowolnego ruchu nie zmienia się wynik działania $\star$ wszystkich napisanych na tablicy liczb. Oznacza to, że po 2012 ruchach na tablicy zostanie

$$1 \star \frac{1}{2} \star \ldots \star \frac{1}{2013}\,.$$

Zadanie 2

Na tablicy napisano liczby $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{2013}$. W jednym ruchu wybieramy dowolne dwie liczby a i b, ścieramy je i zamiast nich wpisujemy liczbę równą $a+b+ab$. Jaką liczbę możemy otrzymać po wykonaniu 2012 ruchów?

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez $a \star b$ liczbę równą $a+b+ab$. Wtedy zauważamy, że po wykonaniu dowolnego ruchu nie zmienia się wynik działania $\star$ wszystkich napisanych na tablicy liczb. Oznacza to, że po 2012 ruchach na tablicy zostanie

$$1 \star \frac{1}{2} \star \dots \star \frac{1}{2013}\,.$$

Zauważając, że $a+b+ab = (a+1)(b+1)-1$ możemy nasz wynik zapisać w postaci

$$(1+1)(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2013}+1)-1 = 2\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2014}{2013}-1 = 2013\,.$$

Zadanie 3

Wykonano nieparzystą ilość obrotów kostką Rubika. Wykaż, że nie można uzyskać konfiguracji początkowej przy pomocy parzystej ilości obrotów. Za jeden obrót uważamy obrót pewnej ściany o 90°.

Szkic rozwiązania

Niezmiennik: treść zadania narzuca rozważyć jakąś parzystość.

Proces: obroty kostki (musimy go zmatematyzować).

Zadanie 3

Wykonano nieparzystą ilość obrotów kostką Rubika. Wykaż, że nie można uzyskać konfiguracji początkowej przy pomocy parzystej ilości obrotów. Za jeden obrót uważamy obrót pewnej ściany o 90°.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy wierzchołki kostki liczbami $1, 2, 3, \ldots, 8$. Następnie na wszystkich odcinkach łączących wierzchołki rysujemy strzałki o zwrocie od wierzchołka o mniejszym numerze do wierzchołka o numerze większym.

Proces: obrót jednej ściany powoduje cykliczną zmianę numeracji obracanej ściany oraz zmianę zwrotu pewnych połączeń.

Niezmiennik: wykażemy, że podczas jednego obrotu zwrot zmienia nieparzysta ilość połączeń.

ciąg dalszy rozwiązania zadania 3

Analizujemy jeden obrót: możemu założyć, że obracamy górną ścianę. Połączenia dzielimy na trzy grupy: $4 \cdot 4$ połączenia pomiędzy górną i dolną ścianą, $4+2$ połączenia w dolnej ścianie i $4+2$ połączenia w górnej ścianie.

Połączenia w dolnej ścianie: nie zmienia się żadne połączenie.

Połączenia pomiędzy górną i dolną ścianą:

ciąg dalszy rozwiązania zadania 3

Analizujemy jeden obrót: możemu założyć, że obracamy górną ścianę. Połączenia dzielimy na trzy grupy: $4 \cdot 4$ połączenia pomiędzy górną i dolną ścianą, $4+2$ połączenia w dolnej ścianie i $4+2$ połączenia w górnej ścianie.

Połączenia w dolnej ścianie: nie zmienia się żadne połączenie.

Połączenia pomiędzy górną i dolną ścianą: jeżeli dokładnie k połączeń idących z góry na dół zmieniło swój zwrot to aby ilość połączeń idących z góry na dół pozostała stała dokładnie k połączeń idących z dołu do góry musi zmienić swój zwrot. Razem zwrot zmienia parzysta ilość połączeń.

Połączenia w górnej ścianie:

ciąg dalszy rozwiązania zadania 3

Analizujemy jeden obrót: możemu założyć, że obracamy górną ścianę. Połączenia dzielimy na trzy grupy: $4 \cdot 4$ połączenia pomiędzy górną i dolną ścianą, $4+2$ połączenia w dolnej ścianie i $4+2$ połączenia w górnej ścianie.

Połączenia w dolnej ścianie: nie zmienia się żadne połączenie.

Połączenia pomiędzy górną i dolną ścianą: jeżeli dokładnie k połączeń idących z góry na dół zmieniło swój zwrot to aby ilość połączeń idących z góry na dół pozostała stała dokładnie k połączeń idących z dołu do góry musi zmienić swój zwrot. Razem zwrot zmienia parzysta ilość połączeń.

Połączenia w górnej ścianie: rozbijamy na dwie grupy. 4 połączenia na obwodzie i 2 przekątne. Zauważamy, że ilość połączeń na obwodzie skierowanych zgodnie z ruchem wskazówek zegara się nie zmienia. Stąd rozumując jak poprzednio stwierdzamy, że tylko parzysta ilość połączeń na obwodzie może zmienić swój zwrot. Na koniec łatwo stwierdzić, że dokładnie jedna przekątna zmienia swój zwrot.

Zadanie 4, LVIII OM, 3 etap

Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy białą, jeżeli jest równa 1 lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite dodatnie nazwiemy czarnymi. Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej białych dzielników jest równa sumie jej czarnych dzielników.

Szkic rozwiązania

Proces: niczego nie widać :-((

Zadanie 4, LVIII OM, 3 etap

Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy białą, jeżeli jest równa 1 lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite dodatnie nazwiemy czarnymi. Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej białych dzielników jest równa sumie jej czarnych dzielników.

Szkic rozwiązania

Wprowadźmy oznaczenia: dla liczby całkowitej dodatniej $k > 1$

$B(k) =$ sumie białych dzielników liczby k,
$C(k) =$ sumie czarnych dzielników liczby k,
$D(k) = B(k) - C(k)$.

Zadanie polega na stwierdzeniu czy istnieją liczby całkowite dodatnie $k > 1$ takie, że $D(k) = 0$.

Hipoteza: Dla $k, l > 1$ takich, że $NWD(k, l) = 1$ zachodzi $D(kl) = D(k)D(l)$.

ciąg dalszy rozwiązania zadania 4

Załóżmy, że postawiona hipoteza jest prawdziwa i wywnioskujmy odpowiedź na postawione pytanie.

Niech $k > 1$ będzie taką liczbą, że $D(k) = 0$. Rozkładając k na czynniki pierwsze

$$k = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdot \ldots p_n^{r_n}$$

otrzymujemy

$$D(k) = D(p_1^{r_1}) D(p_2^{r_2}) \cdot \ldots D(p_n^{r_n}) = 0\,.$$

Stąd dla pewnego j musi zachodzić $D(p_j^{r_j}) = 0$. Jest to jednak niemożliwe gdyż

$$B(p_j^{r_j}) = 1 + p_j^2 + p_j^4 + \ldots$$
$$C(p_j^{r_j}) = p_j + p_j^3 + p_j^5 + \ldots$$
$$D(p_j^{r_j}) = 1 - p_j + p_j^2 - \ldots.$$

Widzimy, że liczba $D(p_j^{r_j})$ daje resztę 1 z dzielenia przez p_j a więc nie może być równa zero.

ciąg dalszy rozwiązania zadania 4

Pozostaje udowodnić hipotezę.

Jeżeli liczby $k, l > 1$ są względnie pierwsze to każdy dodatni dzielnik d iloczynu kl daje się jednoznacznie przedstawić jako iloczyn ab gdzie a jest dzielnikiem dodatnim liczby k oraz b jest dzielnikiem dodatnim liczby l.

Ponadto d jest biały jeżeli a i b mają taki sam kolor oraz d jest czarny gdy a i b są różnych kolorów. Stąd wnioskujemy, że

$$B(kl) = B(k)B(l) + C(k)C(l)\,,$$
$$C(kl) = B(k)C(l) + B(l)C(k)\,,$$

oraz

$$\begin{aligned} D(kl) &= B(kl) - C(kl) = B(k)B(l) + C(k)C(l) - B(k)C(l) - B(l)C(k) \\ &= (B(k) - C(k))(B(l) - C(l)) = D(k)D(l)\,. \end{aligned}$$

Proces: iloczyn liczb względnie pierwszych.

Niezmiennik: udowodniona wlasność operacji D.

Co to jest półniezmiennik procesu?

Półniezmiennik procesu to pewna wielkość,

która może się zmieniać podczas trwania tego procesu tylko w jedną stronę tzn., że stale maleje lub stale rośnie.

Kilka zadań rozwiązanych metodą półniezmienników

Zadanie 5

Na okręgu napisano n *liczb naturalnych. Między każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik, po czym wcześniej zapisane liczby ścieramy. Z nowo otrzymanymi* n *liczbami postępujemy analogicznie. Wykaż, że po pewnej skończonej liczbie kroków wszystkie liczby na okręgu będą sobie równe.*

Kilka zadań rozwiązanych metodą półniezmienników

Zadanie 5

Na okręgu napisano n liczb naturalnych. Między każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik, po czym wcześniej zapisane liczby ścieramy. Z nowo otrzymanymi n liczbami postępujemy analogicznie. Wykaż, że po pewnej skończonej liczbie kroków wszystkie liczby na okręgu będą sobie równe.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez S sumę wszystkich liczb na okręgu. Zauważmy, że jeżeli na okręgu nie wszystkie liczby są równe to S maleje. Ponadto suma S jest ograniczona z dołu co oznacza, że po skończonej liczbie kroków S nie może już maleć i wtedy wszystkie liczby na okręgu będą sobie równe.

Zadanie 6

Na płaszczyźnie danych jest $2n$ *punktów. Wykaż, że zawsze można tak narysować* n *odcinków, aby każdy punkt był końcem pewnego odcinka i odcinki te się nie przecinały.*

Zadanie 6

Na płaszczyźnie danych jest $2n$ punktów. Wykaż, że zawsze można tak narysować n odcinków, aby każdy punkt był końcem pewnego odcinka i odcinki te się nie przecinały.

Szkic rozwiązania

Rysujemy w dowolny sposób n odcinków tak aby każdy z $2n$ punktów był końcem pewnego odcinka. Jeżeli wszystkie narysowane odcinki się nie przecinają to zadanie zostało wykonane. Załóṁy więc, że pewne odcinki AB i CD się przecinają i żadne trzy z czterech punktów A, B, C, D nie są współliniowe. Wtedy poprawiamy nasz układ zastępując odcinki AB i CD odcinkami AC i BD.

Zadanie 6

Na płaszczyźnie danych jest $2n$ punktów. Wykaż, że zawsze można tak narysować n odcinków, aby każdy punkt był końcem pewnego odcinka i odcinki te się nie przecinały.

Szkic rozwiązania

Rysujemy w dowolny sposób n odcinków tak aby każdy z $2n$ punktów był końcem pewnego odcinka. Jeżeli wszystkie narysowane odcinki się nie przecinają to zadanie zostało wykonane. Załóṁy więc, że pewne odcinki AB i CD się przecinają i żadne trzy z czterech punktów A, B, C, D nie są współliniowe. Wtedy poprawiamy nasz układ zastępując odcinki AB i CD odcinkami AC i BD. Jeżeli wszystkie cztery punkty leżą na jednej prostej w kolejności A, C, B, D to ponownie zastępujemy AB i CD odcinkami AC i BD podobnie w przypadku gdy trzy z czterech tych punktów są współliniowe. Zauważamy, że w każdym przypadku suma długości wszystkich odcinków maleje.

Zadanie 6

Na płaszczyźnie danych jest $2n$ punktów. Wykaż, że zawsze można tak narysować n odcinków, aby każdy punkt był końcem pewnego odcinka i odcinki te się nie przecinały.

Szkic rozwiązania

Rysujemy w dowolny sposób n odcinków tak aby każdy z $2n$ punktów był końcem pewnego odcinka. Jeżeli wszystkie narysowane odcinki się nie przecinają to zadanie zostało wykonane. Załóṁy więc, że pewne odcinki AB i CD się przecinają i żadne trzy z czterech punktów A, B, C, D nie są współliniowe. Wtedy poprawiamy nasz układ zastępując odcinki AB i CD odcinkami AC i BD. Jeżeli wszystkie cztery punkty leżą na jednej prostej w kolejności A, C, B, D to ponownie zastępujemy AB i CD odcinkami AC i BD. Podobnie w przypadku gdy trzy z czterech tych punktów są współliniowe. Zauważamy, że w każdym przypadku suma długości wszystkich odcinków maleje. Przy zadanych $2n$ punktach istnieje tylko skończona ilość układów n odcinków. Oznacza to, że po pewnej skończonej liczbie opisanych operacji suma wszystkich odcinków nie będzie się mogła już zmniejszyć co oznacza, że w otrzymanym układzie odcinki już się nie przecinają.