æ
æ

Twierdzenie Menelausa i Cevy.

Część 1. Twierdzenie Menelausa.

Pierwsze twierdzenie podaje warunki algebraiczne konieczne i doostateczne na to, aby trzy punkty leżały na jednej prostej.
Twierdzenie Menelausa.
Niech dany będzie trójkąt ABC i niech prosta k przecina boki BC, CA, AB lub ich przedłużenia w punktach K, L, M odpowiednio. Wtedy zachodzi równość :

$$KB \cdot LC \cdot MA = KC \cdot LA \cdot MB.$$

Dowód.
Poprowadźmy przez wierzchołki trzy proste równoległe, które przecinają prostą k . Niech liczby a, b, c oznaczają odległości wierzchołków od prostej k. Wtedy z twierdzenia Talesa mamy :

$$\frac{KB}{KC} = \frac{b}{c}, \quad ; \frac{LC}{LA} = \frac{c}{a}, \quad \frac{MA}{MB} = \frac{a}{b}.$$

Mnożąc przez siebie powyższe proporcje dostajemy tezę.

Zachodzi także twierdzenie odwrotne ;
Twierdzenie Odwrotne Menelausa.
Jeżeli na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC lub na ich przdłużeniach wzięto punkty K, L, M odpowiednio i zachodzi równość :

$$KB \cdot LC \cdot MA = KC \cdot LA \cdot MB,$$

to te trzy punkty leżą na jednej prostej.

Dowód.
Gdyby prosta $L(KL)$ przecinała prostą $L(AB)$ w punkcie M', to na mocy twierdzenia pierwszego mielibyśmy równość :

$$KB \cdot LC \cdot M'A = KC \cdot LA \cdot M'B.$$

Łącznie z założeniem daje to

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B}.$$

To oznacza , że $M = M'$ i punkty K, L, M leżą na jednej prostej.

Oto kilka zadań ilustrujących zastosowanie tego twierdzenia.
1. Dane są trzy okręgi rozłączne o różnych promieniach. Udowodnij, że wspólne styczne zewnętrzne poprowadzone do trzech par z tych okręgów przecinają się w punktach współliniowych.

2. Na boku AB trójkąta ABC obrano punkt P tak, że $AP = 10,\ PB = 5$, na boku BC punkt Q taki, że $BQ = 6, QC = 6$, oraz na przedłużeniu boku AC punkt R taki, że $AR = 16, CR = 8$. Czy punkty P, Q, R leżą na jednej prostej ?

3. Udowodnij, że dwusieczne kątów zewnętrznych trójkąta przecinają przeciwległe boki w punktach współliniowych.

4. Prosta przecina boki (lub przedłużenia) trójkąta ABC w punktach P, Q, R. Udowodnij, że punkty symetryczne do P, Q, R względem środków boków też są współliniowe.

5. (Om Meksyk 1997) W trójkącie ABC obrano na boku BC punkty P, P', na boku CA punkt Q , na boku AB punkt R takie, że

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}.$$

Oznaczmy przez K punkt przecięcia odcinków AP' i RQ a przez G środek ciężkości trójkąta ABC. Udowodnij, że punkty P, G, K są współliniowe.

6. Udowodnij, że styczne do okręgu opisanego na trójkącie poprowadzone w jego wierzchołkach przecinają jego przeciwległe boki w punktach współliniowych.

7. (prosta Gausse'a). Dana prosta przecina boki AB i BC i przdłużenie boku AC trójkąta ABC w punktach D, E, F odpowiednio. Udowodnij, że środki odcinków DC, AE, BF leżą na jednej prostej.

8. Dane są trzy nieprzecinające się parami okręgi. Niech punkty A_1, A_2, A_3 będą punktami przecięcia wewnętrznych wspólnych stycznych par okręgów, a punkty B_1, B_2, B_3 odpowiednimi punktami przecięcia zewnętrznych wspólnych stycznych par okręgów. Udowodnij, że punkty te leżą na czterech prostych po tzry punkty (A_1, A_2, B_3 i.t.p. .

9. Niech w czworokącie $ABCD$ punkty P, Q, R będą punktami przecięcia BC, AD i CA, BD oraz AB, CD. Niech też punkty L, M, N będą punktami przecięcia AB, PQ i BC, QR oraz AC, PR. Udowodnić, że punkty L, M, N leżą na jednej prostej.

10. (MOM 95) Okrg wpisany w trjkt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB w punktach D, E, F odpowiednio. Obrano punkt X wewnątrz trójkąta ABC . Okrg wpisany w trójkąt XBC jest styczny do boków BC, CX, XB w punktach D, Y, Z. Oznaczmy przez P punkt przecicia prostych EF i BC. Udowodnij, że punkty P, Z, Y leżą na jednej prostej.

Część 2. Twierdzenie Cevy.

Wiele twierdzeń z geometrii w szkole mówi o przecinających się w jednym punkcie prostych, n.p. symetralnych, dwusiecznych, wysokościach trójkąta. Podane niżej twierdzenie ułatwia dowodzenie takich twierdzeń.

Twierdzenie Cevy.

W trójkącie ABC prowadzimy proste przez wierzchołki A,B,C, przecinające przeciwległe boki w punktach K, L, M, odpowiednio. Wtedy proste te przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AL \cdot CK \cdot BM = AM \cdot BK \cdot LC.$$

Dowód.

Niech odcinki AK, BL,CM przecinają się w punkcie O. Wtedy trójkąt AKC przecięty jest prostą BL i z twierdzenia Menelausa mamy

$$BK \cdot CL \cdot AO = AL \cdot BC \cdot KO.$$

Analogicznie dla trójkąta AKB i prostej CM mamy :

$$CK \cdot BM \cdot AO = BC \cdot AM \cdot KO.$$

Dzieląc te proporcje mamy

$$BK \cdot CL \cdot AM = CK \cdot BM \cdot AL.$$

Przeprowadzimy teraz dowód w drugą stronę. Zakładamy, że zachodzi równość

$$AL \cdot CK \cdot BM = AM \cdot BK \cdot LC$$

i odcinki AK i BL przecinają się w punkcie O. Niech też prosta CO przecina bok AB w punkcie E. Wtedy zachodzi na mocy części pierwszej dowodu

$$AL \cdot CK \cdot BE = AE \cdot BK \cdot LC.$$

Porównując to z równością z założenia mamy

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AE}{BE},$$

więc punkty E i M pokrywają się i odcinki AK, BL, CM przecinają się w jednym punkcie.

Poniższe przykłady ilustrują zastosowanie twierdzenia Cevy.

1. Na bokach AB, BC, AC trójkąta ABC obrano punkty M, K, L odpowiednio. Dane są długości

$$BK = 5, \quad BC = 7, \quad CL = 4, \quad AC = 10, \quad AM = 3, \quad AB = 8.$$

Czy odcinki AK, BL, CM przecinają się w jednym punkcie ?

2. Dany jest trójkąt ABC. Punkt Q leży na AC , punkt R na AB. Proste QB i RC przecinają się w punkcie, leżącym na środkowej AP. Udowodnij, że prosta QR jest równoległa do BC.

3. W trójkącie ABC punkt D leży na BC, a dwusieczna kąta ADB przecina bok AB w punkcie F, dwusieczna kąta ADC bok AC w punkcie E. Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

4. Udowodnij za pomocą tw. Cevy, że :
a. Dwusieczne
b. Wysokości
c. Środkowe
w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

5. Udowodnij, że odcinki łączące punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt z przeciwległymi wierzchołkami przecinają się w jednym punkcie. (punkt Gergonne).

6. Na bokach AB i AC trójkąta ABC obrano punkty$L$ i M takie, że $5AL = 2AB$ oraz $4AM = 3AC$. Odcinki BM i CL przecinają się w punkcie P, a odcinki AP i BC punkcie N. W jakim stosunku punkt N dzieli odcinek BC ?

7. (Om Hiszpania 1998) Na przeciwprostokątnej AC trójkąta prostokątnego ABC obrano punkt D taki, że $AB = CD$. Udowodnij, że w trójkącie ABD

dwusieczna kąta A, środkowa z wierzchołka B i wysokość z wierzchołka D przecinają się w jednym punkcie.

8. Okrąg przecina bok AB trójkąta ABC w punktach C_1, C_2, bok BC trójkąta ABC w punktach A_1, A_2, bok AC trójkąta ABC w punktach B_1, B_2, Udowodnij, że jeżeli proste AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w jednym punkcie , to proste AA_2, BB_2, CC_2 przecinają się w jednym punkcie.

9. (Kanada 1994) W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości AD a H jest dowolnym punktem odcinka AD . Proste BH i CH przecinają boki AC i AB w punktach E i F. Udowodnij, że kąty EDH i FDH są równe.

10. (MOM 96) W trójkącie równobocznym ABC obrano na bokach BC, CA, AB punkty A_1, B_1, C_1 tak, że proste AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w jednym punkcie P. Udowodnij, że

$$A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 \geq A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A.$$

Wersja trygonometryczna Twierdzenia Cevy.
Twierdzenie.
Niech punkty A, B, C, K, L, M będą takie jak w Tw. Cevy. Wtedy warunek:

$$AL \cdot CK \cdot BM = AM \cdot BK \cdot LC.$$

równoważny jest warunkowi :

$$sin\angle MCA \cdot sin\angle KAB \cdot sin\angle LBC = sin\angle MCB \cdot sin\angle KAC \cdot sin\angle LBA.$$

Dowód.
Mamy :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{[ACM]}{[BMC]} = \frac{AC \cdot CM \cdot sin\angle ACM}{MC \cdot CB \cdot sin\angle BCM} =$$
$$= \frac{AC \cdot sin\angle ACM}{CB \cdot sin\angle BCM}.$$

Jeżeli napiszemy analogiczne równości dla stosunków odcinków na pozostałych bokach, otrzymamy tezę.

10. Udowodnij : Przekątne AD, BE, CF sześciokąta ABCDEF wpisanego w okrąg przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy AB CD EF = BC DE FA.

11. Udowodnij, że jeżeli trzy proste , przechodzące przez wierzchołki trójkąta przecinają się w jednym punkcie, to proste symetryczne względem odpowiednich dwusiecznych też.

Bibliografia.

1. H. Pawłowski, Zadania z olimpiad matematycznych z całego swiata, Tutor, 2003.
2. W. Prasolow, Zadaczi po planimetrii, Nauka, 1985.
3. I. Szarygin, Zadaczi po planimetrii, Nauka, 1986.