

TWIERDZENIE O SUMIE DEFEKTÓW

Niech w oznacza liczbę wierzchołków, k – liczbę krawędzi, a s – liczbę ścian wielościanu. Wzór Eulera (dla sfery) mówi

$$w - k + s = 2$$

Defekt wierzchołka wielościanu określamy jako 2π – suma kątów przy tym wierzchołku. Suma defektów we wszystkich wierzchołkach to

$$S = 2\pi w - \text{suma wszystkich kątów wszystkich ścian}$$

Suma kątów ściany będącej n -kątem wynosi $(n-2)\pi = n\pi - 2\pi$. Suma kątów wszystkich ścian równa się więc:

$$(n_1\pi - 2\pi) + (n_2\pi - 2\pi) + \dots + (n_s\pi - 2\pi) = (n_1 + n_2 + \dots + n_s)\pi - 2s\pi = 2k\pi - 2s\pi.$$

(zachodzi równość $n_1 + n_2 + \dots + n_s = 2k$, gdyż każda krawędź jest bokiem dokładnie dwóch ścian). Ostatecznie więc

$$S = 2\pi(w - k + s) = 4\pi.$$

Dla innych rozmaitości mamy podobne wzory. Np. dla torusa wzór Eulera ma postać $w - k + s = 0$, więc suma defektów jest zerem.