Styczne i normalne

Prosta łącząca dwa punkty na krzywej nazywa się sieczną. Jeśli będziemy zbliżać te punkty do siebie, to granicznym położeniem siecznej będzie styczna. Prostą prostopadłą do stycznej nazywamy z kolei normalną.

Aby więc wyznaczyć normalną w punkcie A, należy wziąć inny punkt B i znaleźć równanie symetralnej odcinka AB. Następnie trzeba zażądać, by punkt B zbliżył się do punktu A.

Przykład. Dla paraboli $y = x^2$ bierzemy $A = (t, t^2), B = (u, u^2)$. Załóżmy, że punkt $P = (x, y)$ jest równo oddalony od A i B :

$$\sqrt{(x-t)^2 + (y-t^2)^2} = |PA| = |PB| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-u^2)^2}$$

$$x^2 - 2xt + t^2 + y^2 - 2yt^2 + t^4 = x^2 - 2xu + u^2 + y^2 - 2yu^2 + u^4$$

$$2x(u-t) + 2y(u^2 - t^2) = u^2 + u^4 - t^2 - t^4$$

Dzieląc powyższe równanie przez $2(u-t)$, otrzymujemy

$$x + y(u+t) = \frac{u^2 - t^2}{2(u-t)} + \frac{u^4 - t^4}{2(u-t)} = \frac{u+t}{2} + \frac{u^3 + u^2 t + u t^2 + t^3}{2}$$

Podstawiając $u = t$ dostajemy równanie normalnej do paraboli $y = x^2$ w punkcie (t, t^2):

$$x + 2ty = t + 2t^3$$

W następnym kroku znajdźmy punkt przecięcia normalnej z „sąsiednią” normalną, czyli prostą

$$x + 2sy = s + 2s^3$$

dla s bardzo bliskiego t. Będzie to środek okręgu krzywiznowego dla punktu (t, t^2).

Odejmując powyższe równania otrzymujemy

$$2ty - 2sy = t + 2t^3 - s - 2s^3$$

$$y = \frac{t - s + 2t^3 - 2s^3}{2(t-s)} = \frac{1}{2} + t^2 + ts + s^2$$

a następnie

$$x = t + 2t^3 - 2ty = t + 2t^3 - 2t(\frac{1}{2} + t^2 + ts + s^2) = -2ts(t+s)$$

Wstawiając $s = t$ otrzymujemy punkt $(-4t^3, 3t^2 + 1/2)$ – środek krzywizny paraboli w punkcie (t, t^2). Zbir wszystkich takich punktów tworzy krzywą w kształcie mewy z charakterystycznym szpicem w punkcie $(0, 1/2)$.