Środek i promień krzywizny

Aby wyznaczyć okrąg krzywiznowy w punkcie A, bierzemy dwa inne punkty B i C, po czym opisujemy okrąg na trójkącie ABC. Następnie żądamy, by punkty B i C zbliżyły się do punktu A.

Przykład. Dla paraboli $y = x^2$ bierzemy $A = (0,0), B = (t, t^2), C = (-t, t^2)$. Na mocy symetrii środek okręgu krzywiznowego leży na prostej $x = 0$, niech będzie to $O = (0, r)$. Wtedy z definicji okręgu

$$r = |OA| = |OB| = \sqrt{(t-0)^2 + (t^2 - r)^2}$$

$$r^2 = t^2 + t^4 - 2rt^2 + r^2$$

$$r = \frac{t^2 + t^4}{2t^2} = \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}$$

Jeśli t będzie zbliżać się do zera, to otrzymamy graniczną wartość $r = 1/2$ oraz środek krzywizny $(0, 1/2)$.

Ten sam wynik otrzymamy wyliczając symetralną odcinka AB. Załóżmy, że punkt $P = (x, y)$ jest równo oddalony od A i B :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |PA| = |PB| = \sqrt{(x-t)^2 + (y - t^2)^2}$$

$$x^2 + y^2 = x^2 - 2tx + t^2 + y^2 - 2t^2y + t^4$$

$$tx + t^2y = \frac{t^2 + t^4}{2}$$

Obecnie znajdujemy środek okręgu jako punkt przecięcia powyższej prostej z prostą $x = 0$, będącą symetralną odcinka BC. Wynikiem jest ponownie

$$y = \frac{t^2 + t^4}{2t^2} = \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}$$

Zauważmy też, że ogólne równanie okręgu stycznego do prostej $y = 0$ w punkcie $(0,0)$, to jest okręgu o środku $(0, r)$ i promieniu r dla dowolnego r, ma postać $x^2 + (y - r)^2 = r^2$, czyli

$$2ry - y^2 = x^2.$$

W pobliżu zera można twierdzić, że $y^2 \ll y$, więc okrąg ten przypomina parabolę $2ry = x^2$, a w szczególności parabolę $y = x^2$ dla $r = 1/2$.

Można też zauważyć, że liczba punktów wspólnych okręgu $2ry - y^2 = x^2$ i paraboli $y = x^2$ zmienia się, gdy $r = 1/2$. Istotnie, podstawiając równanie paraboli do równania okręgu, otrzymujemy:

$$2rx^2 - x^4 = x^2$$

$$x^4 = (2r - 1)x^2$$

$$x = 0 \vee x^2 = 2r - 1,$$

co daje jedno rozwiązanie, gdy $r \leq 1/2$, oraz trzy, gdy $r > 1/2$.

Analizując powyższe podejścia możemy powiedzieć, że okrąg $y = x^2 + y^2$ jest w pewnym sensie ,,bardzo styczny" do paraboli $y = x^2$ w punkcie $(0,0)$, a na pewno ,,bardziej styczny" niż jakikolwiek inny.