Krzysztof Chełmiński Warszawa, MiNI-Akademia, 11.02.2012

Najmocniejsze twierdzenie geometrii w zadaniach

Zadanie 1. Rozłączne zewnętrznie okręgi o_1 i o_2 są wpisane w kąt o wierzchołku P. Okrąg o_1 jest styczny do pierwszego ramienia kąta w punkcie A, a do drugiego w punkcie C, okrąg o_2 odpowiednio w punktach B i D. Prosta m jest styczna do okręgu o_1 w punkcie E, a do okręgu o_2 w punkcie F i przecina pierwsze ramię kąta w punkcie K, a drugie w punkcie L. Wykaż, że

(a) $|PA| = |PC|$,
(b) $|AB| = |CD|$,
(c) $|AB| = |KL|$,
(d) $|KE| = |FL|$,
(e) $|KF| = |EL|$.

Zadanie 2. W trójkącie ABC okręgi dopisane do tego trójkąta są styczne do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach P, Q i R. Wykaż, że $|CQ| = |BR|$, $|CP| = |AR|$ oraz $|AQ| = |BP|$.

Zadanie 3. Dany jest kąt wypukły α, punkt P i odcinek t. Przez punkt P poprowadź prostą, która od kąta α odetnie trójkąt o obwodzie $2t$.

Zadanie 4. Dany jest kąt wypukły α o wierzchołku A oraz odcinki p i h. Skonstruować prostą, która od kąta α odetnie trójkąt ABC o obwodzie $2p$ i wysokości h poprowadzonej z wierzchołka:

(a) C, (b) A.

Zadanie 5. Dany jest kąt wypukły α o wierzchołku A oraz odcinki t i a. Poprowadź prostą, która od kąta α odetnie trójkąt ABC o obwodzie $2t$, taki że $|BC| = a$.

Zadanie 6. Dane są dwa różne punkty A i B. Znaleźć zbiór punktów styczności takich okręgów stycznych zewnętrznie, że jeden z nich jest styczny do prostej AB w punkcie A, a drugi jest styczny do prostej AB w punkcie B.

Zadanie 7. Wykazać, że możliwość wpisania okręgu w czworokąt wypukły $ABCD$ jest równoważna równości $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$. Uogólnić ten wynik na czworokąty wklęsłe oraz krzyżowe.

Zadanie 8. Okręgi, których średnicami są ramiona trapezu, są stycznie zewnętrznie. Wykaż, że w ten trapez można wpisać okrąg.

Zadanie 9. Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i CDA są styczne. Wykaż, że wtedy okręgi wpisane w trójkąty BCD i DAB też są styczne.

Zadanie 10. W trójkącie ABC przez punkt wewnętrzny P poprowadzono proste CP, AP i BP, które przecinają boki trójkąta AB, BC i CA odpowiednio w punktach K, L i M. Wykaż, że jeżeli w czworokąty $AKPM$ i $KBLP$ można wpisać okręgi to w czworokąt $LCMP$ też można wpisać okrąg.

Zadanie 11. Postawą ostrosłupa $ABCDS$ jest równoległobok $ABCD$, a punkt A jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa. Okręgi wpisane w ściany SBC i SDC są styczne. Wykaż, że równoległobok $ABCD$ jest rombem.

Większość z tych zadań pochodzi ze zbiorów dra Jerzego Bednarczuka