MiNI Akademia Matematyki na Politechnice Warszawskiej

Krzysztof Chełmiński

Okręgi i styczne

MiNI PW, 14.10.2017

Podstawowe twierdzenia wykorzystywane w zadaniach z ćwiczeń

Twierdzenie 1 (najmocniesze twierdzenie geometrii, NTG)

Odcinki styczne poprowadzone do danego okręgu z ustalonego punktu są równej długości.

Dowód Niech dany okrąg ω ma promień długości r i środek w punkcie O. Oznaczmy przez A punkt styczności stycznej do ω z punktu P. Z twierdzenia Pitagorasa długość odcinka stycznego wynosi

$$PA^2 = PO^2 - r^2 \,.$$

Wniosek

W trójkąt ABC wpisano okrąg i dopisano okrąg styczny do boku BC. Punkt styczności okręgu wpisanego z BC oznaczono przez X a punkt styczności okręgu dopisanego z BC przez A'. Wtedy

$$BX = A'C = p - AC$$

gdzie p jest połową obwodu trójkąta ABC.

Dowód Oznaczmy przez K i L punkty styczności okręgu wpisanego do boków AC i AB oraz przez M i N punkty styczności okręgu dopisanego z prostymi AC i AB. Wtedy z NTG

$$XB + BA' = LB + BN = KC + CM = CX + CA' \,.$$

Twierdzenie 2 (o kącie między styczną a cięciwą)

Niech AB będzie cięciwą w danym okręgu oraz niech prosta l będzie styczną do tego okręgu w punkcie A poprowadzoną z punktu P. Wtedy kąt $\angle PAB$ jest równy kątowi wpisanemu w okrąg i opartemu na łuku wyznaczonym przez cięciwę AB.

Dowód Wybierzmy taki kąt wpisany oparty na łuku wyznaczonym przez cięciwę AB, w którym ramie AC jest średnicą okręgu. Wtedy z równości

$$\angle PAB + \angle BAC = 90^\circ = \angle BAC + \angle ACB$$

wynika teza.

Zadanie

Dwa okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach P i Q. Z punktu A okręgu ω_1 poprowadzono proste AP i AQ, które przecięły ω_2 w punktach B i C. Wykaż, że styczna do ω_1 w punkcie A jest równoległa do prostej BC.

Rozwiązanie Czworokąt $PQCB$ jest wpisany w okrąg. Stąd

$$\angle PBC = \angle AQP$$

i z twierdzenia 2 kąt między styczną w punkcie A do ω_1 jest równy kątowi $\angle AQP$ co prowadzi do tezy zadania.

Twierdzenie 3 (o trójliściu)

Niech ABC będzie trójkątem, w którym dwusieczna kąta $\angle ABC$ przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wtedy $AD = DC = DI$.

Dowód Równość $AD = DC$ wynika z równości odpowiednich łuków. Wykażemy, że trójkąt AID jest równoramienny.

$$\angle DIA = \angle IAB + \angle ABI = \angle CAD + \angle IAC = \angle IAD\,.$$

Stąd $DA = DI$.

Wniosek (wzór Eulera)

Okrąg opisany na trójkącie ABC ma środek w punkcie O i promień R. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma środek w punkcie I i promień r. Zachodzi następująca równość

$$OI^2 = R(R-2r)\,.$$

Dowód Niech punkt D będzie środkiem łuku BC na okręgu opisanym na trójkącie ABC niezawierającym A oraz E niech będzie środkiem łuku BC zawierającym A. Niech K będzie rzutem prostokątnym I na prostą AC. Wtedy trójkąty IKA i DEB są podobne. Więc

$$\frac{IK}{AI} = \frac{BD}{DE} \quad \Rightarrow \quad AI \cdot DB = 2Rr\,.$$

Z twierdzenia 3 $DB = DI$ więc

$$2Rr = AI \cdot DI = R^2 - OI^2\,.$$

Twierdzenie 4 (o biegunowej punktu względem okręgu)

Punkt A leży wewnątrz okręgu ω o środku O i promieniu r. Zbiorem punktów powstałych z przecięcia prostych stycznych do ω w końcach dowolnej cięciwy zawierającej A jest prosta prostopadła do prostej OA. W literaturze prosta ta nazywa się biegunową punktu A względem ω.

Dowód Niech BC będzie cięciwą zawierającą A. Oraz niech M będzie punktem przecięcia prostych stycznych do ω w punktach B i C. Oznaczmy długość odcinka AO przez a. Z Twierdzenia Pitagorasa mamy

$$AM^2 = BM^2 - \frac{1}{4}BC^2 + (\frac{1}{2}BC - AB)^2 = BM^2 - BA(BC - BA) = BM^2 - AB \cdot AC = BM^2 - r^2 + a^2 .$$

Ponadto zachodzi

$$OM^2 = BM^2 + r^2 .$$

Łącząc te dwie równości wnioskujemy, że

$$OM^2 - AM^2 = 2r^2 - a^2 \iff OM^2 - 2r^2 = AM^2 - a^2 .$$

Zbiór punktów M spełniających ostatnią równość jest osią potęgową okręgu o środku w O i promieniu $\sqrt{2}r$ oraz okręgu o środku w A i promieniu a. Oś potęgowa jest prostą prostopadłą do prostej OA łączącej środki obu okręgów.

Twierdzenie 5 (o okręgu 9 punktów)

Niech A', B' i C' będą środkami boków BC, AC i AB trójkąta ABC. Wtedy okrąg opisany na trójkącie $A'B'C'$ przechodzi przez spodki wysokości trójkąta ABC i przez środki odcinków łączących wierzchołki trójkąta ABC z ortocentrum tego trójkąta.

Dowód Oznaczmy przez D, E i F spodki wysokości poprowadzonych z wierzchołków A, B i C. $B'D$ łączy środek przeciwprostokątnej AC z wierzchołkiem D kąta prostego, więc $2B'D = AC$. Oczywiście $2A'C' = AC$ i trapez $A'DC'B'$ jest równoramienny. Stąd punkt D należy do okręgu opisanego na $A'B'C'$. Podobnie pokazujemy, E i F należą do tego okręgu.

Oznaczmy środek odcinka łączącego C z ortocentrum przez M. Prosta MB' jest równoległa do AD, a więc jest to prosta prostopadła do prostej $A'B'$. Podobnie prosta MA' jest równoległa do prostej BE i dlatego jest prostopadła do prostej $A'C'$. Na czworokącie $MA'C'B'$ można opisać okrąg, co pokazuje, że M należy do okręgu opisanego na $A'B'C'$. Podobnie analizujemy pozostałe środki odcinków łączących wierzchołki A i B z ortocentrum.

Uwaga Łatwo zauważyć, że środek okręgu 9 punktów jest środkiem odcinka łączącego ortocentrum ze środkiem okręgu opisanego na danym trójkącie. Więc jest to punkt z prostej Eulera (prosta przechodząca przez ortocentrum i środek okręgu opisanego).

Inwersja na płaszczyźnie

Definicja

Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O i promieniu r. Obrazem punktu A w inwersji względem okręgu ω jest punkt A' z półprostej OA taki, że $OA \cdot OA' = r^2$.

Fakt 1

Inwersja przekształca okręgi nieprzechodzące przez środek inwersji na okręgi oraz okręgi przechodzące przez środek inwersji na proste.

Fakt 2

Okrąg $\omega_1 \neq \omega$ przechodzi w inwersji względem ω na samego siebie wtedy i tylko wtedy gdy ω_1 jest prostopadły do ω.

Dowód Oznaczmy promień okręgu ω_1 przez R. ω_1 musi przecinać się z ω w dwóch punktach. Wystarczy więc wykazać, że punkt ω_1 najdalej położony od środka inwersji przechodzi na punkt ω_1 najbliższy środka inwersji. Niech odległość pomiędzy środkami okręgów wynosi p. Wtedy

$$(p+R)(p-R) = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = R^2 + r^2 \,.$$

Twierdzenie 6 (Feuerbacha)

Okrąg 9 punktów trójkąta ABC jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC i do trzech okręgów dopisanych do tego trójkąta.

Dowód Niech ω_1 będzie okręgiem wpisanym w trójkąt ABC, ω_2 niech będzie okręgiem dopisanym do trójkąta ABC stycznym do boku BC oraz ω niech będzie okręgiem o średnicy wyznaczonej przez punkty styczności X i Y ω_1 z BC i ω_2 z BC. Z wniosku po NTG środek ω to A' czyli środek odcinka BC. Ponadto okrąg ω jest prostopadły do ω_1 i do ω_2. Stąd inwersja względem ω przekształca ω_1 na siebie i ω_2 na siebie. Wykażemy, że okrąg 9 punktów przechodzi na prostą B_1C_1, która jest wspólną styczną wewnętrzną do ω_1 i ω_2 różną od prostej BC co natychmiast zakończy dowód.

Oznaczmy przez $BC = a$, $AC = b$ i $AB = c$. Wtedy średnica ω, zakładając, że $b > c$ wynosi $b - c$. Stąd stosując tylko NTG mamy $BC_1 = B_1C = b - c$. Niech S będzie punktem przecięcia stycznych wewnętrznych. Z twierdzenia o dwusiecznej $SB = \frac{ac}{b+c}$ i $SC = \frac{ab}{b+c}$.

Z równości $SB + SA' + A'C = a$ dostajemy $SA' = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$. Niech B'' (C'') będzie punktem przecięcia prostej $B'A'$ ($C'A'$) z B_1C_1. Trójkąty $SA'B''$ i SBC_1 ($SA'C''$ i SB_1C) są podobne i dlatego

$$\frac{A'B''}{b-c} = \frac{SA'}{SB} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}\frac{b+c}{ac} = \frac{b-c}{2c}, \quad \frac{A'C''}{b-c} = \frac{SA'}{SC} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}\frac{b+c}{ab} = \frac{b-c}{2b}$$

Ostatecznie

$$A'B'' \cdot A'B' = \frac{(b-c)^2}{2c}\frac{c}{2} = \frac{(b-c)^2}{4} = \frac{(b-c)^2}{2b}\frac{b}{2} = A'C'' \cdot A'C'\,.$$