æ

Miniakademia. 12.10.2013.

Leszek Sidz

Kilka przydatnych twierdzeń geometrii.

Część 1. Twierdzenie o siecznych i potęga punktu względem okręgu.

I.Teoria.

Twierdzenie 1.
Niech przez punkt A przechodzą dwie półproste. Na jednej z nich położone są punkty B i C, na drugiej punkty D i E. Wtedy zachodzi następująca równoważność :
Punkty B, C, D, E leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AD \cdot AE = AC \cdot AB.$$

Twierdzenie 2.
Niech punkt A będzie punktem przecięcia odcinków BC i DE. Wtedy zachodzi następująca równoważność :
Punkty B, C, D, E leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AD \cdot AE = AC \cdot AB.$$

Twierdzenie 3.
Jeżeli dany jest trójkąt ABD i punkt C , leżący na prostej AD, to zachodzi następująca równoważność :
Odcinek AB jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie BDC wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AB^2 = AC \cdot AD.$$

W poniższych zadaniach zobaczymy zastosowanie omówionych twierdzeń.

II. Zadania przykładowe.

Zadanie .
W równoległoboku $ABCD$ przekątna AC jest dłuższa niż BD. Okrąg opisany na trójkącie BCD przecina przekątną AC w punkcie M. Udowodnij, że BD jest wspólna styczną do okręgów opisanych na trójkątach ABM i ADM.

Zadanie .
(Rosja 1994). Oznaczmy w trójkącie ABC przez a, b, c długości jego boków BC, AC, AB , a przez m_a, m_b, m_c długości środkowych AA', BB', CC' , opuszczonych na te boki. Nech R oznacza promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
Udowodnić, że wtedy

$$\frac{a^2+b^2}{m_c} + \frac{b^2+c^2}{m_a} + \frac{c^2+a^2}{m_b} \leq 12R.$$

III.Teoria.

Przypomnijmy twierdzenie o iloczynie długości odcinków siecznych poprowadzo nych z punktu A przez okrąg O. Ponieważ iloczyn ten zależy tylko od punktu A i okręgu O możemy zdefiniować :
Definicja. Potęga punktu A względem okręgu O o promieniu r i środku w punkcie S jest zdefiniowana przez

$$Pot_O(A) = AS^2 - r^2.$$

Widać z tej definicji, że punkty wewnątrz okręgu mają ujemną wartość potęgi, punkty poza mają dodatnią wartość potęgi. Potęga punktów na okręgu jest równa zero.

Potęgę punktu można też zdefiniować równoważnie jako iloczyn odległości punktu A od dwóch punktach przecięcia dowolnej siecznej z A z okręgiem. Na przykład, niech sieczna wychodząca z punktu A, leżącego na zewnątrz okręgu, przecina okrąg w dwóch punktach M i N, a styczna z A ma punkt B wspólny z okręgiem. Poprowadźmy sieczną przez A przechodzącą przez środek okręgu i przecinającą okrąg w punktach C i D . Wtedy na mocy powyższych twierdzeń mamy

$$AB^2 = AM \cdot AN = AC \cdot AD = (AS - r)(AS + r) = AS^2 - r^2.$$

Zauważmy też, że potęga punktu zewnętrznego A względem okręgu jest równa kwadratowi odcinka stycznej z punktu A.

Lemat. Dany jest odcinek AB i liczba m. Zbiorem punktów X, które spełniają warunek

$$AX^2 - BX^2 = m$$

jest prosta prostopadła do AB.
Dowód.
Weźmy punkt X , spełniający warunki zadania i niech prosta prostopadła do AB przechodząca przez punkt X przecina prostą AB w punkcie C. Wtedy

$$AX^2 = AC^2 + XC^2$$

$$BX^2 = XC^2 + BC^2.$$

Odejmując te równości stronami mamy

$$AX^2 - BX^2 = AC^2 - BC^2$$

$$= (AC - BC)(AC + BC) = (AB - 2BC)(AB) = m.$$

Stąd BC jest stałe, więc punkt C nie zależy od wyboru punktu X. Zatem mamy tezę udowodnioną.

Z tego lematu wynika twierdzenie :

Twierdzenie 4. (Oś potęgowa). Dane są dwa okręgi. Osią potęgową tych dwóch okręgów nazywamy zbiór punktów, które mają równą potęgę względem obu okręgów. Zbiorem tych punktów jest prosta prostopadła do prostej łączącej środki tych okręgów.

Twierdzenie 5.
Osie potęgowe trzech okręgów przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.
Dowód.
Niech osie dwóch okręgów O i O' oraz O i O' przecinają się w punkcie A. Wtedy potęgi punktu A względem okręgów O' i O" też są równe, więc punkt A leży też na osi potęgowej okręgów O' i O".

Punkt przecięcia osi potęgowych zwany jest środkiem potęgowym tych trzech okręgów. Istnieje on, gdy środki tych okręgów nie leżą na jednej prostej.

II. Zadania przykładowe.

Zadanie .
Okrąg o środku O wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA w punktach K, L, M, N odpowiednio. Proste KL i MN przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że BD i OS są prostopadłe.

Część 2. i Twierdzenie Ptolemeusza.

I.Teoria.

Twierdzenie Ptolemeusza.
Niech dany będzie czworokąt wypukły $ABCD$. Wtedy :
Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy , gdy

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Można udowodnić, że zachodzi twierdzenie ogólniejsze :
Twierdzenie (Nierówność Ptolemeusza.)
W dowolnym czworokącie $ABCD$ zachodzi

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt można wpisać w okrąg.

II. Zadania przykładowe.

Zadanie .
Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Punkt P leży na krótszym łuku AC tego okręgu. Udowodnij, że $PA + PC = PB$.

Zadanie .
(MOM 97). W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ mamy : $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FE$. Udowodnij, że

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

Część 3. Twierdzenie Cantora.

Było stwierdzenie :
Zadanie 1.Dane są punkty A,B. Udowodnić, że miejscem geometrycznym punktów M takich, że $AM^2 - MB^2 = k$, k dana liczba, jest prosta prostopadła do AB.

Twierdzenie Cantora. Udowodnić, że proste prostopadłe opuszczone z punktów A_1, B_1, C_1 na boki BC, CA, AB trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0.$$

Zadanie .
Dany jest trójkąt równoboczny ABC i dowolny punkt D. Niech A_1, B_1, C_1 będą środkami okręgów wpisanych na trójkątach BCD, CAD, ABD. Udowodnić, że proste prostopadłe opuszczone z punktów A, B, C na proste B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie.
Niech A_2, B_2, C_2 oznaczają rzuty punktów A_1, B_1, C_1 na BC, AC, AB. Prostopadłe do boków trójkąta równobocznego w punktach A_1, B_1, C_1 przechodzą przez punkty A_2, B_2, C_2. Z równości odcinków stycznych mamy $BA_2 = \frac{AB+BD-CD}{2}$, $CA_2 = \frac{AB+CD-BD}{2}$. Jeżeli wypiszemy analogiczne równości dla pozostałych punktów, możemy sprawdzić, że równanie z twierdzenia Cantora jest spełnione dla rzutów punktów A_1, B_1, C_1 na boki BC, CA, AB. Ale równość w twierdzeniu Cantora jest symetryczna, więc mamy tezę.