Największe, najmniejsze i co z tego wynika

Barbara Roszkowska-Lech

Warszawa, 19 listopada 2011

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

warszawa miastem edukacji

G.H. Hardy, S. Ramanujan

Liczba taksówkowa

$$1729 = 1^3 + 12^3$$

Liczba taksówkowa

$$1729 = 1^3 + 12^3$$

$$= 9^3 + 10^3$$

Twierdzenie

Każda liczba naturalna jest interesująca

Własności podzbiorów zbioru liczb naturalnych i rzeczywistych

Każdy niepusty skończony podzbiór A zbioru liczb naturalnych lub rzeczywistych ma element najmniejszy i element największy.

Własności podzbiorów zbioru liczb naturalnych i rzeczywistych

Każdy niepusty skończony podzbiór A zbioru liczb naturalnych lub rzeczywistych ma element najmniejszy i element największy.

Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych ma element najmniejszy.

Własności podzbiorów zbioru liczb naturalnych i rzeczywistych

Każdy niepusty skończony podzbiór A zbioru liczb naturalnych lub rzeczywistych ma element najmniejszy i element największy.

Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych ma element najmniejszy.

Uwaga

Nieskończony podzbiór zbioru liczb rzeczywistych nie musi mieć najmniejszego czy też największego elementu. Jeśli jest ograniczony z góry to ma najmniejsze ograniczenie górne. Jeśli jest ograniczony z dołu to ma największe ograniczenie dolne.

Metoda ekstremum: idea

- Chcemy udowodnić, że (skończony) podzbiór $A \subset N$ liczb naturalnych ma pewną własność W.

Metoda ekstremum: idea

- Chcemy udowodnić, że (skończony) podzbiór $A \subset N$ liczb naturalnych ma pewną własność W.
- Załóżmy, że istnieje zbiór $B \neq \emptyset$, $B \subset A$, taki że elementy z B nie spełniają własności W.

Metoda ekstremum: idea

- Chcemy udowodnić, że (skończony) podzbiór $A \subset N$ liczb naturalnych ma pewną własność W.
- Załóżmy, że istnieje zbiór $B \neq \emptyset$, $B \subset A$, taki że elementy z B nie spełniają własności W.
- W B istnieje element najmniejszy (najwiekszy),ozn b.

Metoda ekstremum: idea

- Chcemy udowodnić, że (skończony) podzbiór $A \subset N$ liczb naturalnych ma pewną własność W.
- Załóżmy, że istnieje zbiór $B \neq \emptyset$, $B \subset A$, taki że elementy z B nie spełniają własności W.
- W B istnieje element najmniejszy (najwiekszy),ozn b.
- Znajdujemy element zbioru A mniejszy (lub większy) od b, który nie spełnia własności W.

Metoda ekstremum: idea

- Chcemy udowodnić, że (skończony) podzbiór $A \subset N$ liczb naturalnych ma pewną własność W.
- Załóżmy, że istnieje zbiór $B \neq \emptyset$, $B \subset A$, taki że elementy z B nie spełniają własności W.
- W B istnieje element najmniejszy (najwiekszy),ozn b.
- Znajdujemy element zbioru A mniejszy (lub większy) od b, który nie spełnia własności W.
- **Sprzeczność**

Metoda ekstremum: modyfikacja

Metoda nieskończonego schodzenia

- Załóżmy, że jest dodatnia liczba całkowita a nie spełniająca własności W.

Metoda ekstremum: modyfikacja

Metoda nieskończonego schodzenia

- Załóżmy, że jest dodatnia liczba całkowita a nie spełniająca własności W.
- Jeśli znajdziemy liczbę $a_1 < a$, taką że własność W nie jest spełniona dla a_1, to możemy skonstruować nieskończony malejący ciąg liczb całkowitych dodatnich

$$a > a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

nie spełniajacy własności W.

Metoda ekstremum: modyfikacja

Metoda nieskończonego schodzenia

- Załóżmy, że jest dodatnia liczba całkowita a nie spełniająca własności W.
- Jeśli znajdziemy liczbę $a_1 < a$, taką że własność W nie jest spełniona dla a_1, to możemy skonstruować nieskończony malejący ciąg liczb całkowitych dodatnich

$$a > a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

  nie spełniajacy własności W.
- Taki ciąg nie istnieje.

Metoda ekstremum: modyfikacja

Metoda nieskończonego schodzenia

- Załóżmy, że jest dodatnia liczba całkowita a nie spełniająca własności W.
- Jeśli znajdziemy liczbę $a_1 < a$, taką że własność W nie jest spełniona dla a_1, to możemy skonstruować nieskończony malejący ciąg liczb całkowitych dodatnich

  $$a > a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

  nie spełniajacy własności W.
- Taki ciąg nie istnieje.
- **Sprzeczność**

Pitagorejczycy

Twierdzenie

$\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód.

$\square$

Dowód.

- Chcemy pokazać, że nie istnieją liczby całkowite dodatnie x, y, takie że $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$.

$\square$

Dowód.

- Chcemy pokazać, że nie istnieją liczby całkowite dodatnie x, y, takie że $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$.
- Równanie $x^2 = 2y^2$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

$\square$

Dowód.

- Chcemy pokazać, że nie istnieją liczby całkowite dodatnie x, y, takie że $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$.
- Równanie $x^2 = 2y^2$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.
- Przypuśćmy, że $x = n$ oraz $y = m$ jest takim rozwiązaniem oraz n jest najmniejszą możliwą wartoscią x.

$\square$

Dowód.

- Chcemy pokazać, że nie istnieją liczby całkowite dodatnie x, y, takie że $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$.
- Równanie $x^2 = 2y^2$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.
- Przypuśćmy, że $x = n$ oraz $y = m$ jest takim rozwiązaniem oraz n jest najmniejszą możliwą wartoscią x.
- Jeśli $n^2 = 2m^2$ to n jest liczbą parzystą czyli $n = 2k$.

□

Dowód.

- Chcemy pokazać, że nie istnieją liczby całkowite dodatnie x, y, takie że $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$.
- Równanie $x^2 = 2y^2$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.
- Przypuśćmy, że $x = n$ oraz $y = m$ jest takim rozwiązaniem oraz n jest najmniejszą możliwą wartoscią x.
- Jeśli $n^2 = 2m^2$ to n jest liczbą parzystą czyli $n = 2k$.
- Wtedy $4k^2 = (2k)^2 = 2m^2$ czyli $m^2 = 2k^2$, a więc m jest możliwą wartoscią x, taką że $x^2 = 2y^2$.

$\square$

Dowód.

- Chcemy pokazać, że nie istnieją liczby całkowite dodatnie x, y, takie że $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$.
- Równanie $x^2 = 2y^2$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.
- Przypuśćmy, że $x = n$ oraz $y = m$ jest takim rozwiązaniem oraz n jest najmniejszą możliwą wartoscią x.
- Jeśli $n^2 = 2m^2$ to n jest liczbą parzystą czyli $n = 2k$.
- Wtedy $4k^2 = (2k)^2 = 2m^2$ czyli $m^2 = 2k^2$, a więc m jest możliwą wartoscią x, taką że $x^2 = 2y^2$.
- Ale $m < n$ Sprzeczność z minimalnością n.

$\square$

Fermat (1601-1665)

Fermat (1601-1665)

Udowodnił wiele twierdzeń z teorii liczb

Fermat (1601-1665)

Udowodnił wiele twierdzeń z teorii liczb

Pod koniec życia napisał, ze wszystkie swoje wyniki zawdzięcza metodzie nieskończonego schodzenia.

Twierdzenie

Nieparzysta liczba pierwsza jest sumą dwóch całkowitych kwadratów wtedy i tylko wtedy gdy $p = 4k + 1$.

Twierdzenie

Nieparzysta liczba pierwsza jest sumą dwóch całkowitych kwadratów wtedy i tylko wtedy gdy $p = 4k + 1$.

Dowód.

- Zauważmy, że liczba postaci $4k + 3$ nie jest sumą kwadratów liczb całkowitych.

$\square$

Twierdzenie

Nieparzysta liczba pierwsza jest sumą dwóch całkowitych kwadratów wtedy i tylko wtedy gdy $p = 4k + 1$.

Dowód.

- Zauważmy, że liczba postaci $4k + 3$ nie jest sumą kwadratów liczb całkowitych.
- Każdy kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 4 .

$\square$

Twierdzenie

Nieparzysta liczba pierwsza jest sumą dwóch całkowitych kwadratów wtedy i tylko wtedy gdy $p = 4k + 1$.

Twierdzenie

Nieparzysta liczba pierwsza jest sumą dwóch całkowitych kwadratów wtedy i tylko wtedy gdy $p = 4k + 1$.

Dowód.

- Załóżmy, że jest liczba pierwsza postaci $4k + 1$, która nie jest sumą dwóch kwadratów. Wtedy mozna znaleźć mniejszą liczbę o tej wlasności.

$\square$

Twierdzenie

Nieparzysta liczba pierwsza jest sumą dwóch całkowitych kwadratów wtedy i tylko wtedy gdy $p = 4k + 1$.

Dowód.

- Załóżmy, że jest liczba pierwsza postaci $4k + 1$, która nie jest sumą dwóch kwadratów. Wtedy mozna znaleźć mniejszą liczbę o tej wlasności.
- Potem jeszcze mniejszą i jeszcze mniejszą....

$\square$

Twierdzenie

Nieparzysta liczba pierwsza jest sumą dwóch całkowitych kwadratów wtedy i tylko wtedy gdy $p = 4k + 1$.

Dowód.

- Załóżmy, że jest liczba pierwsza postaci $4k + 1$, która nie jest sumą dwóch kwadratów. Wtedy mozna znaleźć mniejszą liczbę o tej wlasności.
- Potem jeszcze mniejszą i jeszcze mniejszą....
- I tak dochodzimy do 5 najmniejszej liczby pierwszej postaci $4k + 1$, która nie jest sumą dwóch kwadratów.

$\square$

Twierdzenie

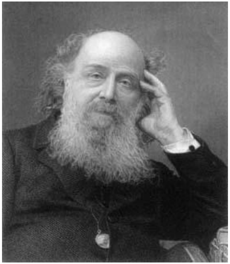
Nieparzysta liczba pierwsza jest sumą dwóch całkowitych kwadratów wtedy i tylko wtedy gdy $p = 4k + 1$.

Dowód.

- Załóżmy, że jest liczba pierwsza postaci $4k + 1$, która nie jest sumą dwóch kwadratów. Wtedy mozna znaleźć mniejszą liczbę o tej wlasności.
- Potem jeszcze mniejszą i jeszcze mniejszą....
- I tak dochodzimy do 5 najmniejszej liczby pierwszej postaci $4k + 1$, która nie jest sumą dwóch kwadratów.
- Ale $5 = 1^2 + 2^2$!!!!

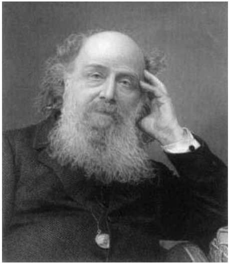
$\square$

Hipoteza Sylvestera (1893)



J. J. Sylwester

Hipoteza Sylvestera (1893)

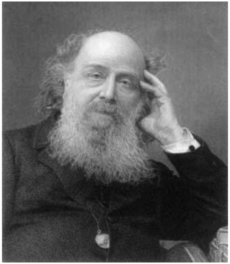


J. J. Sylwester

Hipoteza

Niech S bedzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyznie takim, że dowolna prosta przechodząca przez dwa punkty ze zbioru S zawiera trzeci punkt z tego zbioru. Wtedy wszystkie punkty zbioru S leżą na jednej prostej.

Hipoteza Sylvestera (1893)

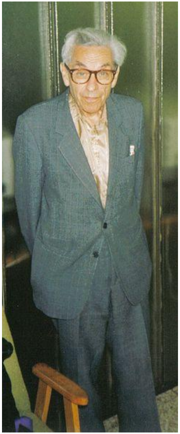


J. J. Sylwester

Hipoteza

Niech S bedzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyznie takim, że dowolna prosta przechodząca przez dwa punkty ze zbioru S zawiera trzeci punkt z tego zbioru. Wtedy wszystkie punkty zbioru S leżą na jednej prostej.

Rok 1933 Gallai udowodnił hipotezę Sylwestera. Dowód długi i skomplikowany.



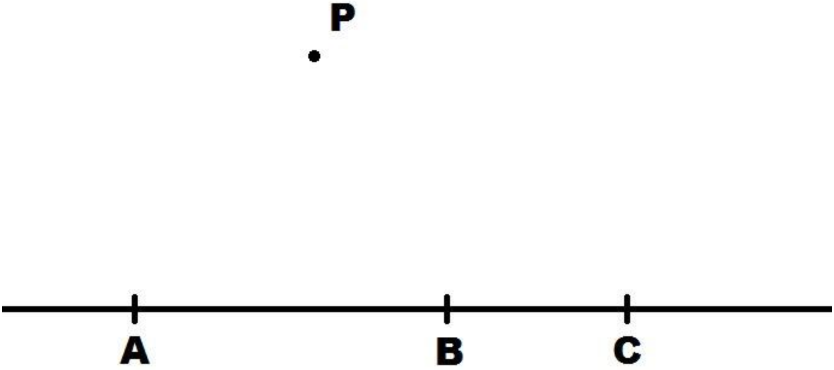
Paul Erdös

Hipoteza

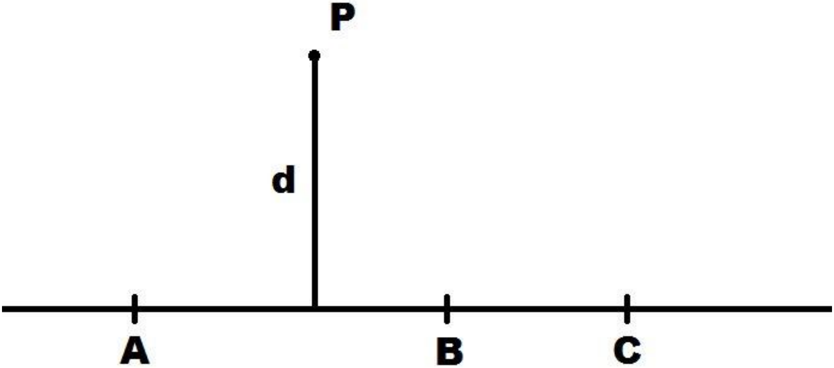
Niech S będzie zbiorem n niewspółliniowych punktów na płaszczyźnie. Istnieje prosta przechodząca dokładnie przez dwa punkty z S.

Rok 1948 Kelly: Dowód z wykorzystaniem zasady ekstremum.

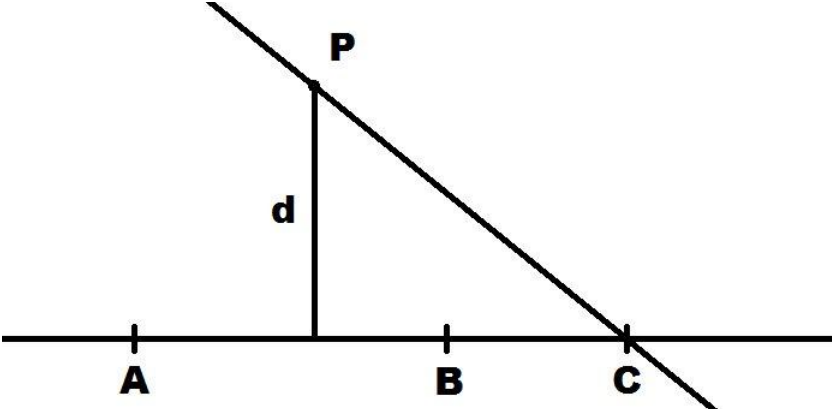
Rok 1948 Kelly: Dowód z wykorzystaniem zasady ekstremum.



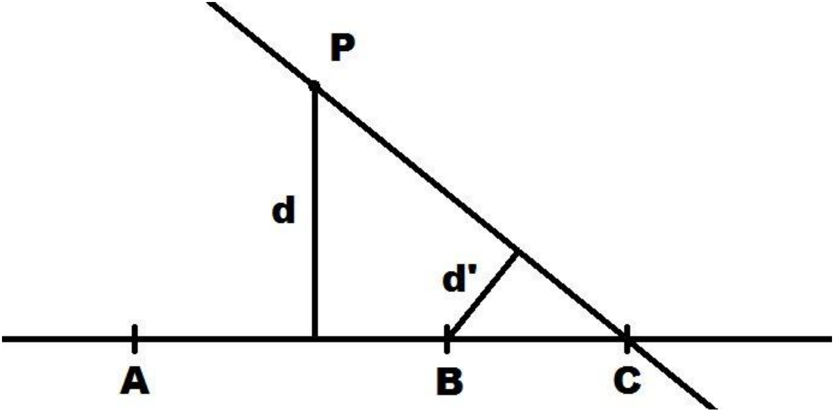
Rok 1948 Kelly: Dowód z wykorzystaniem zasady ekstremum.



Rok 1948 Kelly: Dowód z wykorzystaniem zasady ekstremum.



Rok 1948 Kelly: Dowód z wykorzystaniem zasady ekstremum.



Zadanie

Państwo Kowalscy zaprosily na kolację 3 zaprzyjaźnione pary. Niektórzy goscie witali sie uściskiem dłoni. Pan Kowalski zapytał każdego o to ilu osobom podał rękę. Zapytał też swoją żonę i okazało się, że każda z pytanych osób uścisnęła inną liczbę dłoni. Oczywiście Pan Kowalski nie pytał siebie, ponadto nikt nie witał sie z partnerem z którym przyszedł. Z iloma osobami witała sie żona Pana Kowalskiego?

Zadanie 2 (Olimpiada matematyczna Węgry 2000)

Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p , takie, że istnieją liczby dodatnie x, y oraz n, takie że $p^n = x^3 + y^3$.

- Animacje flash Michał Zwierzyński
- Portrety matematyków: wikipedia.
- Rysunki Michał Lech

Dziękuję za uwagę