

# Gdyby człowiek miał 8 palców...

Czyli liczby na przestrzeni dziejów








Przykłady i zadanka



I Starożytny Egipt.

Zad. 1.

Wykonaj działania:

|   |   |   |  |   |   |   |
|---|---|---|--|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1   | 10  | 100   | 1000   | 10000   | 100000  | 10 <sup>6</sup>   |

a)  $432 - 234 =$

b)



Zad. 2. Która liczba jest większa?



Zad. 3. Weź liczbę 142857 i przemnoż ją – sposobem egipskim - przez

a) 3

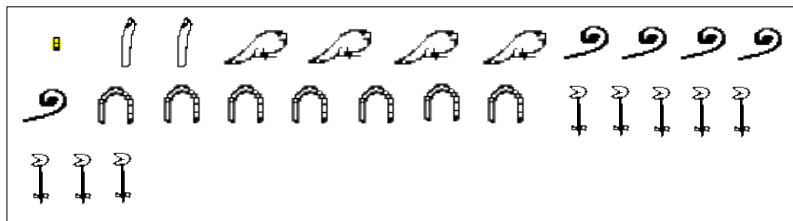
b) 5

c) 6

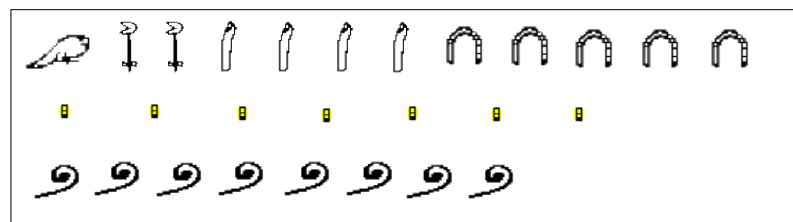
Zad. 4. Przyporządkuj wyniki:

1·142857; 2·142857; 3·142857; 4·142857; 5·142857; 6·142857

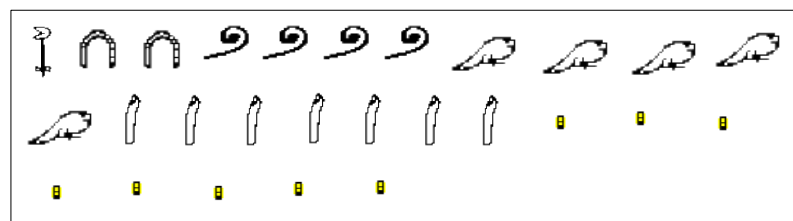
[1]



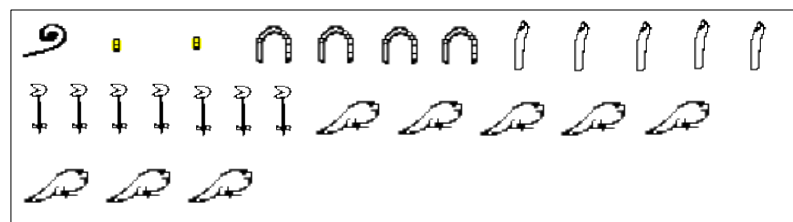
[2]



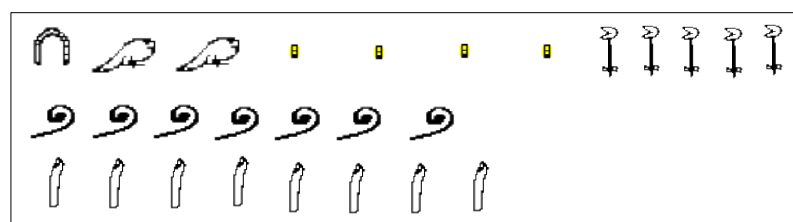
[3]



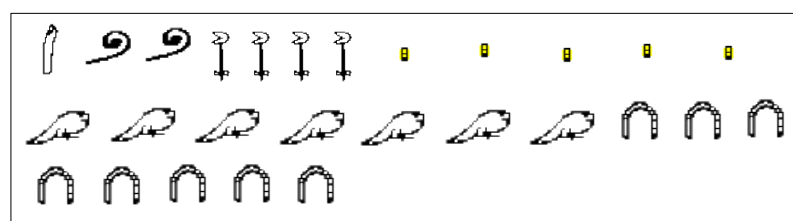
[4]



[5]



[6]



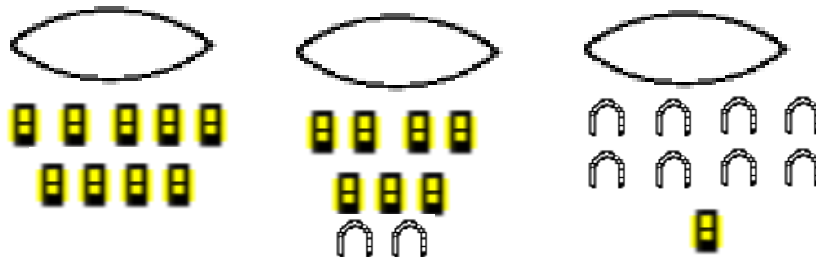
Podpowiedź: Jeśli wyniki są poprawne, czy trzeba korzystać z poprzedniego zadania?

Zad. 5. Dwóch skrybów miało zapisać udział swojego pana w bitwie z Hetytami, w której zdobyto wielki złoty posąg. Do boju stanęło 13 jego oddziałów, a wszystkich oddziałów było razem 81. Który skryba jest lepszy?

Pierwszy zapisał:



Drugi zapisał:



Zad.6. Wyobraź sobie, że jesteś egipskim skrybą i rozwiązujesz zadanie pochodzące z papyrusu Rhinda (problem 65):

„Przykład podzielenia 100 bochenków pomiędzy 10 mężczyzn, włączając przewoźnika, majstra i odźwiernego, którzy otrzymują podwójne porcje. Jaki jest udział każdego?”.

Rozwiązanie egipskie:

„Dodaj do liczby mężczyzn tych trzech, którzy mają podwójne porcje, to czyni 13. Pomnóż \_\_\_ tak by otrzymać \_\_\_, wynik to

---

To jest zatem racja dla 7 mężczyzn, przewoźnik, majster i odźwierny otrzymują podwójne porcje.”

Zapisz wynik w notacji Egipcjan;

Zad.7. Wyobraź sobie, że jesteś egipskim skrybą i rozwiązujesz zadanie pochodzące z papiirusu Rhinda (problem 66):

„Jeśli 10 hekat tłuszczu jest dane na rok, jakie jest zużycie dzienne?”

Wynik należy podać w jednostce rho, przy czym 320 rho = hekat, przyjmujemy 365 dni w roku.

Zad.8. Rozwiąż za egipskiego skrybę pochodzące z papiirusu Rhinda (problem 41). Porównaj swój wynik z tym, co otrzymałby on, stosując swój algorytm (wynik po działaniu algorytmu po prawej).

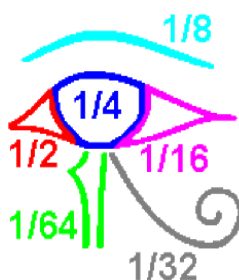
„Znajdź objętość cylindrycznego spichlerza o średnicy 9 i wysokości 10”

Rozwiązanie egipskie:

„Zabierz  $1/9$  średnicy, czyli 1.  
Pozostaje 8. Pomnóż 8 razy 8,  
czylniac 64. Pomnóż 64 razy 10,  
to czyni 640 łokci sześciennych.”  
Dalej następuje przeliczenie na khar  
(jednostka mniejsza niż hekat)  
i hekat (około 4.8 l).

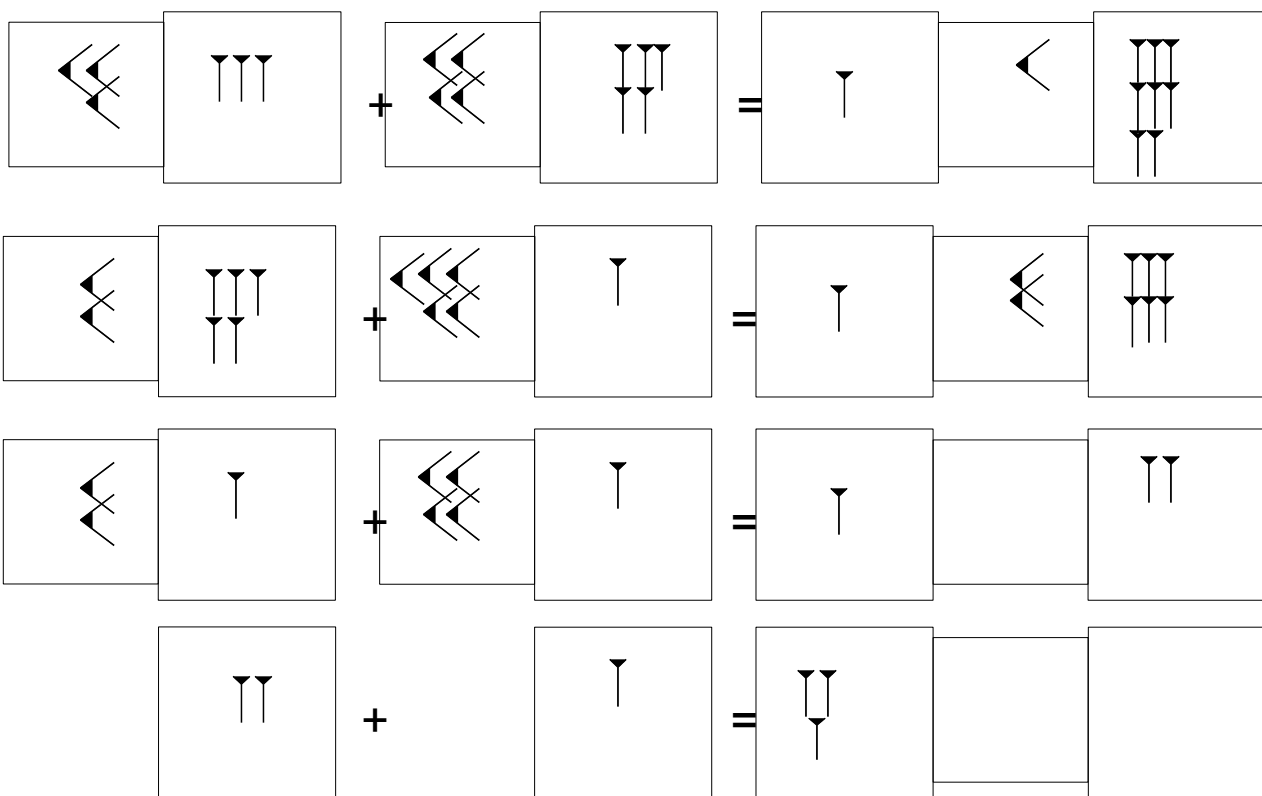
- odtwórz algorytm

Zad.9. Jaką część oka Horusa widać przez dziurkę od klucza??





1. Sprawdź poprawność rachunków

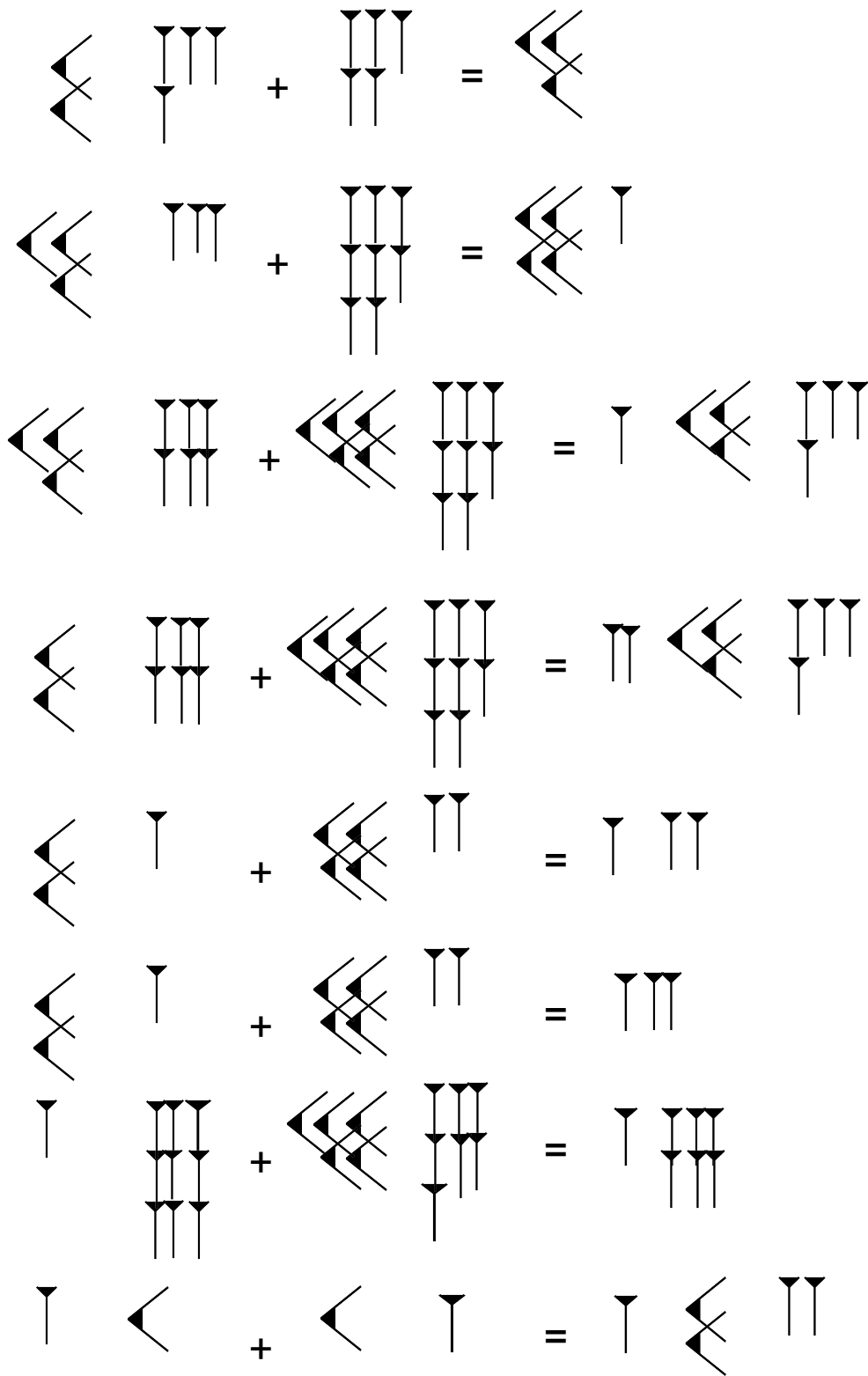


2. Uzupełnij tabliczkę mnożenia.

| x |  |   |   |  | < |
|---|--|---|---|--|---|
|   |  |   | < |  |   |
| < |  |   |   |  |   |
|   |  | < |   |  |   |



3. Sprawdź poprawność rachunków



$$\begin{array}{l} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} + \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} =$$

4. Rozwiązać równania.

$$\begin{array}{l} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{array} + \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{array} = \begin{array}{l} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \end{array} + \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \end{array} = \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{l} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} + \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} = \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{array} \begin{array}{l} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} + \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} = \begin{array}{l} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{array} + \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{array} = \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{array} - \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{array} = \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \end{array}$$

5. Beltaszassar dostał od uroczej kelnerki numer telefonu























Biorąc pod uwagę, że w Babilonie obowiązują trzycyfrowe numery telefonów, pomóż Beltaszassarowi odnaleźć miłość.




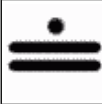
II System liczbowy Majów:

|  |                   |                    |                     |                      |
|--|-------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| 0<br>       | 1<br>•            | 2<br>••            | 3<br>•••            | 4<br>••••            |
| 5<br>—   | 6<br>•<br>—       | 7<br>••<br>—       | 8<br>•••<br>—       | 9<br>••••<br>—       |
| 10<br>=  | 11<br>•<br>=      | 12<br>••<br>=      | 13<br>•••<br>=      | 14<br>••••<br>=      |
| 15<br>≡  | 16<br>•<br>≡      | 17<br>••<br>≡      | 18<br>•••<br>≡      | 19<br>••••<br>≡      |
| 20<br>•<br> | 21<br>•<br>•      | 22<br>•<br>••      | 23<br>•<br>•••      | 24<br>•<br>••••      |
| 25<br>•<br>—   | 26<br>•<br>•<br>— | 27<br>•<br>••<br>— | 28<br>•<br>•••<br>— | 29<br>•<br>••••<br>— |

Zad. 1. Który z poniższych zapisów przedstawia liczbę 75 129

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Zad.2. Którą z liczb przedstawia zapis:

|   |
|---|
|  |
|  |
|  |
|  |

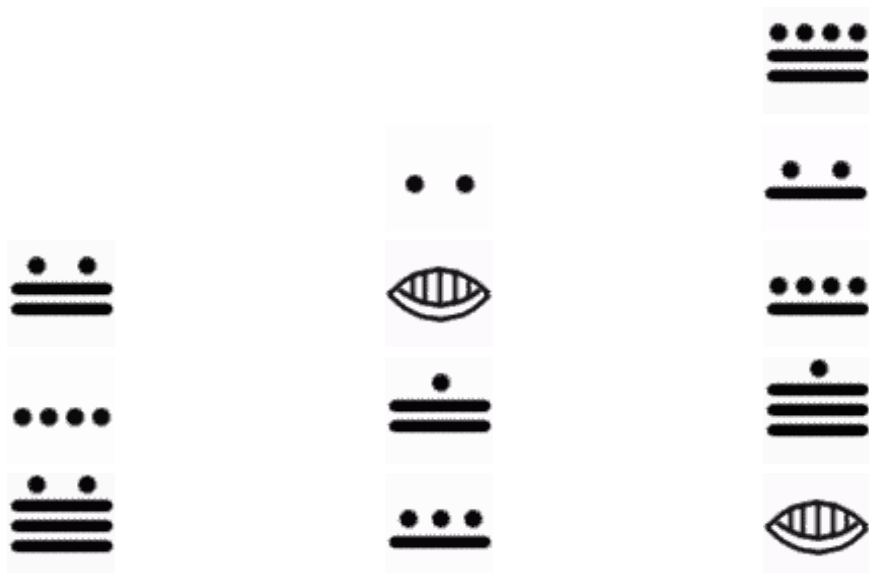
a) 46 151

b) 56 011

c) 63 211

d) 63 331

Zad.3. Zapisać podane liczby Majów w systemie dziesiętnym:



Zad.4. Zapisać podane liczby za pomocą systemu liczbowego Majów:

253

1790

342 982

20 130 316

Zad.5. Uzupełnić fragment tabliczki mnożenia:

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Zad.6. Wykonać dodawanie liczb (bez przekształcania liczb do systemu dziesiętnego):

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \hline \hline \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array} =$$

Zad.7. Wykonać odejmowanie liczb (bez przekształcania liczb do systemu dziesiętnego):

$$\begin{array}{c} \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \hline \hline \end{array} = \begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} =$$

Zad.8. Rozwiąż równania:

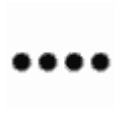
$$X - \begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \\ \hline \hline \hline \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}$$

Y

+



=



IV Liczby greckie.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Α | Β | Γ | Δ | Ε | Ϛ | Ζ | Η | Θ |
| α | β | γ | δ | ε | ς | ζ | η | θ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Ι  | Κ  | Λ  | Μ  | Ν  | Ξ  | Ο  | Π  | Ϛ  |
| ι  | κ  | λ  | μ  | ν  | ξ  | ο  | π  | ρ  |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ρ   | Σ   | Τ   | Υ   | Φ   | Χ   | Ψ   | Ω   | Ϟ   |
| ρ   | σ   | τ   | υ   | φ   | χ   | ψ   | ω   | ξ   |
| 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| ͰΑ   | ͰΒ   | ͰΓ   | ͰΔ   | ͰΕ   | ͰϚ   | ͰΖ   | ͰΗ   | ͰΘ   |
| 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 | 7000 | 8000 | 9000 |

1. Zamień na cyfry arabskie liczby:

- a) ρκγ      b) ΦΙΔ      c) ,ΘΘ      d)  $\overline{ΒΓ}$

2. Zapisz w przy użyciu liczb greckich następujące liczby:

- a) 321      b) 231      c) 15 438      d) 1,125      e) 15/23.

3. Sprawdź poprawność wykonanych działań:

- a)  $\mu/\eta=\varepsilon$       b)  $\kappa\gamma+\iota\varsigma=\mu$       c)  $\xi\cdot\iota\beta'=\varepsilon$

4. Jeden ze sławnych Galów (ten bardziej puszysty ;) ) zjadł na kolację:  $\delta$  dziki i  $\lambda$  kurczaków. Jego przyjaciel zjadł tylko  $\alpha$  dzika i  $\delta$  kurczaki. Oblicz ile ważył posiłek posiłek każdego z nich wiedząc, że dzik waży  $\rho\kappa$  kg a kurczak  $\beta'$  kg.

5. Pewnego dnia dwaj mężczyźni Galowie napotkali w lesie kohortę rzymskiego wojska. Pierwszy z nich pojmał  $\beta$  a drugi  $\delta$  centurii. Wiedząc, że jedna centuria liczy  $\rho$  żołnierzy oblicz liczebność kohorty.



## Zadania z treścią

- Przeczytać i zapisać słownie liczbę:
  - 4294967295;
  - 1656742183;
  - 111213141516123456009;
  - 112233445566778899001;
  - $15 \cdot 10^4$ ;
  - $63 \cdot 10^5$ .
- Liczby podane w zadaniu 1. zapisać z dokładnością do trzech najbardziej znaczących cyfr
  - w postaci dziesiętnej;
  - w postaci będącej iloczynem naturalnej liczby trzycyfrowej i odpowiedniej potęgi 10;
  - w postaci liczby z przedziału  $(0; 1]$  mającej po przecinku dwie cyfry pomnożonej przez odpowiednią potęgę 10.
- Odszukać zapis kilku stałych matematycznych lub fizycznych, w których zastosowano zaokrąglenie.
- Zapisać pismem klinowym liczby: 38277, 60000.
- Opracować algorytm hinduski dla liczb z zadania 4, w których zapisie liczby talentów, min i szekli są zapisane w notacji dziesiętnej a nie pismem klinowym.
- Zapisać liczby 6284 i 20521 w notacji egipskiej różnie rozmieszczając hieroglify.
- Wykonać mnożenie 132 i 258 przy pomocy egipskiego algorytmu (na dwa sposoby).
- Wykonać dzielenie 586 przez 293 przy pomocy egipskiego algorytmu.
- Zapisać w notacji greckiej liczbę 285 i 285531.
- Zsumować na rzymskim abaku liczby 6258 i 2963.
- Liczbę 26252 zapisać w dwójkowym, siódmkowym, ósemkowym i szesnastkowym pozycyjnym układzie liczenia.
- Wykonać mnożenia  $26252_7 \cdot 315_7$  i  $26252_{16} \cdot 315_{16}$  posługując się algorytmem mnożenia „pod kreską”.
- Opracować cechy podzielności dla liczb od 2 do 10 w układzie siódmkowym i ósemkowym.

14. Wzorując się na algorytmie dodawania księgowych zrealizować algorytm mnożenia księgowych na liczbach 785 i 649.
15. Rozwiązać równanie:  $\text{NWD}(55, 121) : \text{NWW}(6, 11) + x = 0,5$ .
16. Jest taka ciekawa liczba pięciocyfrowa  $a$ , że jeżeli dopiszemy do niej 1 z lewej strony, to otrzymamy liczbę sześciocyfrową, która jest trzy razy mniejsza od liczby sześciocyfrowej otrzymanej w wyniku dopisania 1 do niej z prawej strony.
- a) Wyznaczyć liczbę  $a$ , wiedząc, że jest zapisana w dziesiętkowym systemie liczenia.
- b) Znaleźć liczbę spełniającą podane warunki, która byłaby zapisana w czwórkowym (piątkowym) układzie liczenia.
- c) Wykazać, że nie istnieje taka liczba zapisana w dwójkowym ani w trójkowym układzie liczenia.
- d) Sformułować warunek, jaki musi spełniać podstawa liczenia, aby mogła taka liczba istnieć.
17. Cyfra dziesiątek pewnej liczby naturalnej mniejszej od 63 jest o trzy większa od cyfry jedności. Jaka to liczba?
18. Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest równa 11. Jeżeli napiszemy cyfry w odwrotnej kolejności, to otrzymamy liczbę mniejszą od połowy szukanej liczby. Jaka to liczba?
19. Udowodnić, że 57 jest dzielnikiem  $7^{15} - 1$ .
20. Udowodnić, że 33 jest dzielnikiem  $16^5 + 2^{15}$ .
21. Udowodnić, że 6 jest dzielnikiem  $5^{n+5} - 5^{n+4} + 5^{n+3}$ .
22. Udowodnić, że suma dowolnie wybranych trzech kolejnych potęg liczby 2 jest podzielna przez 7.
23. Wykazać, że suma dowolnych trzech kolejnych potęg liczby 3 jest podzielna przez pewną liczbę pierwszą większą od 3.
24. Ile jest liczb sześciocyfrowych, które przy dzieleniu przez 29 dają resztę 13 lub 15?
25. Wykazać, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą.
26. Wykazać, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych z dzielenia przez 3 daje resztę 2.
27. Wykazać, że różnica czwartych potęg dwóch liczb całkowitych różniących się o 2 jest podzielna przez 8.

28. Wykazać, że suma liczby dwucyfrowej i liczby utworzonej z tych samych cyfr zapisanych w odwrotnej kolejności jest podzielna przez 11.
29. Udowodnić, że różnica kwadratów liczb nie dzielących się przez 3 jest podzielna przez 3.
30. Udowodnić, że liczba postaci  $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę parzystą większą od 4, jest podzielna przez 384.
31. Wykazać, że jeżeli  $m$  jest dowolną liczbą całkowitą, to  $m^6 2m^4 + m^2$  jest podzielną przez 36.
32. Dla jakich liczb pierwszych  $p$  liczby  $p + 10$  i  $p + 14$  są pierwsze?
33. Dla jakich liczb pierwszych  $p$  liczby  $p + 4$  i  $p + 14$  są pierwsze?
34. Udowodnić, że jeżeli liczby  $p$  i  $5p^2 - 2$  są pierwsze, to liczby  $5p^2 - 4$  i  $5p^2 + 2$  też są pierwszymi.
35. Udowodnić, że jeżeli liczby  $p$  i  $2p^2 + 13$  są pierwsze, to liczby  $2p^2 + 1$  i  $2p^2 + 11$  też są pierwszymi.
36. Udowodnić, że jeżeli  $p$  jest liczbą pierwszą różną od 5, to liczba  $p^4$  z dzielenia przez 5 daje resztę 1.
37. Udowodnić, że jeżeli liczby  $p$  i  $8p^2 + 1$  są pierwsze, to liczba  $8p^2 - 1$  też jest pierwsza.
38. Wyznaczyć wszystkie dzielniki naturalne liczby 3240.
39. Wyznaczyć wszystkie dzielniki całkowite liczby 2520.
40. Zrealizowano algorytm mnożenia i dodawania. Pewne cyfry uległy zatarciu. Wiadomo tylko dodatkowo, że liczby i działania są zapisane w jednym algorytmie w systemie ósemkowym, a w drugim szesnastkowym. Odtworzyć zatarte zapisy.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | * | F | * | 5 | 8 | 8 | 8 | 8 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | 1 | * | * | * | * | 5 | 6 | 2 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |