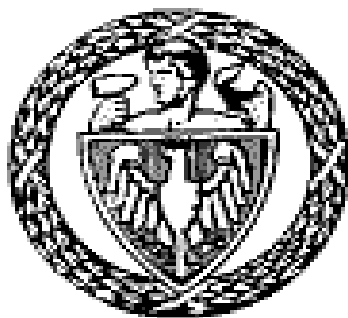


Gdybyśmy mieli
po 8 palców..



Politechnika Warszawska

Grzegorz Sójka



Wydz. Matematyki i Nauk
Informacyjnych

Pytanie jak zapisywać liczby - a raczej ilość??

Wszystko zaczęło się kilkadziesiąt tysięcy lat temu..
(~30.000, nacięcia na kościach – system karbowy)

Pierwsze zaczątki systemu pozycyjnego, ok 4.000 lpne. Mezopotamia
(dolina pomiędzy Eufratem i Tygrysem w Azji).

Około 3.000 lpne. rodzi się koncepcja pisma zwanego dzisiaj klinowym.

Początkowo (ok. 2.000 lpne.) w Babilonie obowiązywały następujące
liczebniki główne: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20. Dalej: $30=3*10$,
 $40=2*20$, $50=2*20+10$. Później dochodzi 60 - szekiel - „wielka jednostka”.

Około 1800 lpne. najstarsze tabliczki gliniane z tekstami matematycznymi.

Klin „pionowy” :  = 1, klin „poziomy”  = 10.

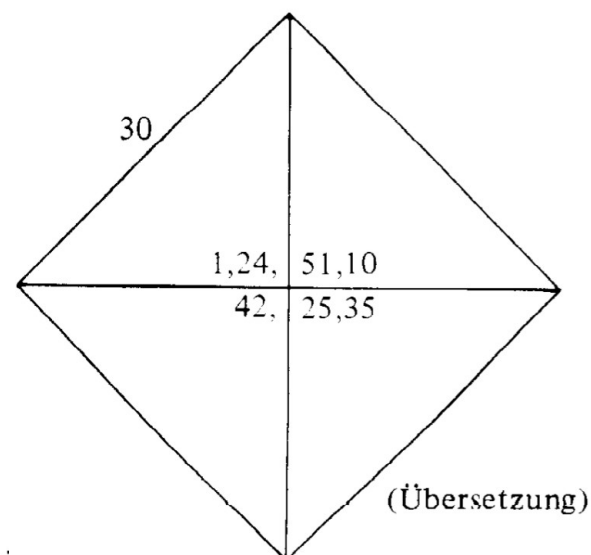
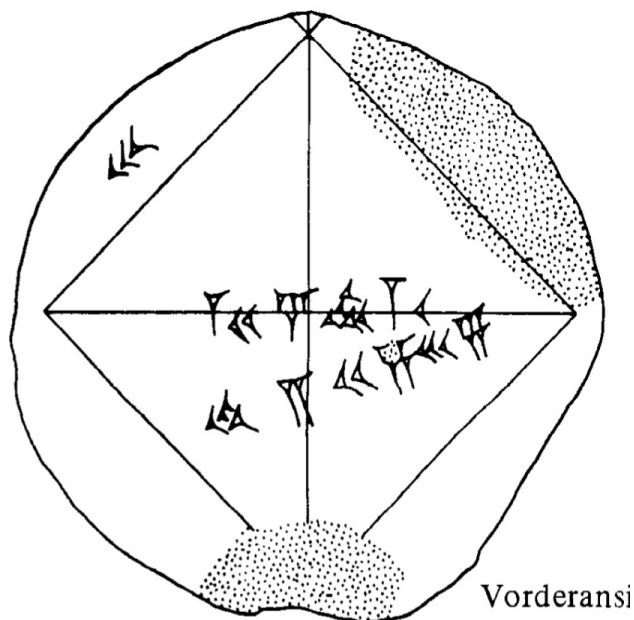
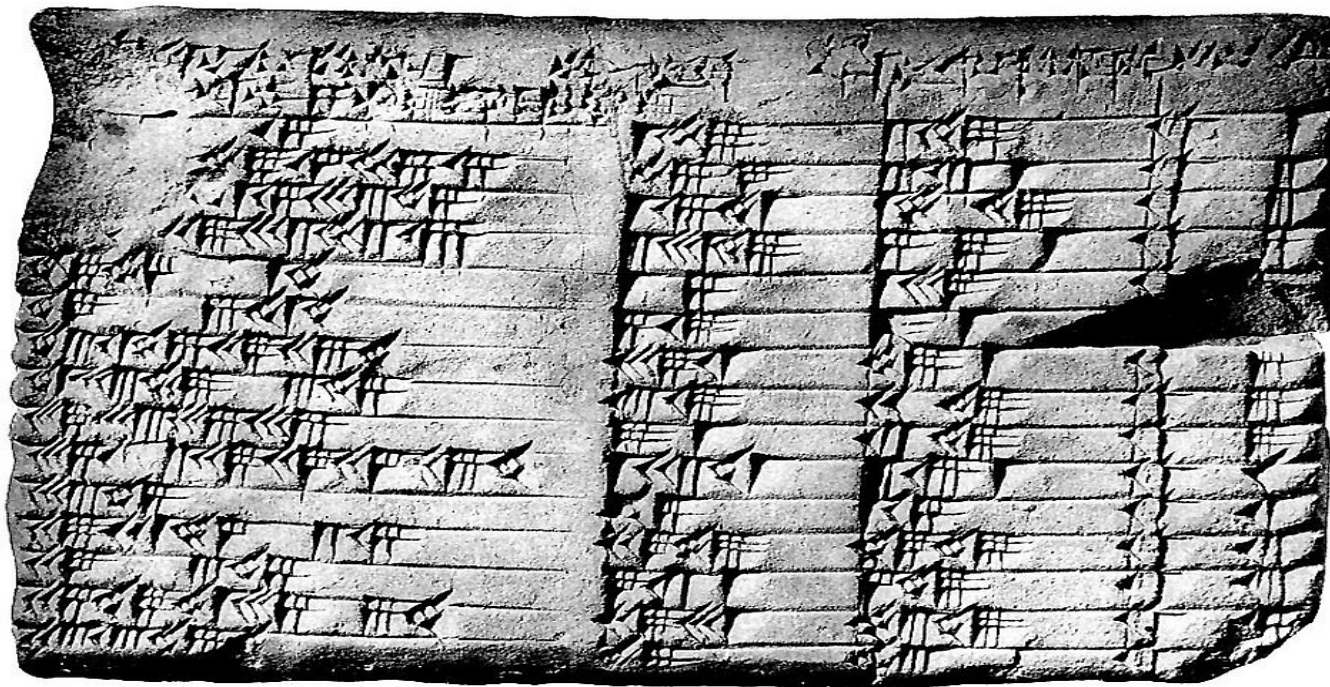
						...				...		...		...		
1	2	3	4	5	6	...	9	10	11	...	19	...	50	...	59	60
		...	...	...	...	...				...		...		...		
61	62	...	...	...	...	...	69	70	71	...	79	...	110	...	119	120
		...	...	...	...	...				...		...		...		
121	122	...	...	...	...	...	129	130	131	...	139	...	170	...	179	180
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
		...	...	...	...	...				...		...		...		
541	542	...	...	...	...	...	549	550	551	...	559	...	590	...	599	600
		...	...	...	...	...				...		...		...		
601*	602*	...	...	...	...	...	609*	610	611	...	619	...	650	...	659	660

Źródło: Dr. Christoph Grandt, *Das Babylonische Sexagesimalsystem*.

7 wpne. nowe liczebniki: mina = 60^2 , talent = 60^3 .

3 wpne. wprowadzenie „zera” (wypełniacza): lub .

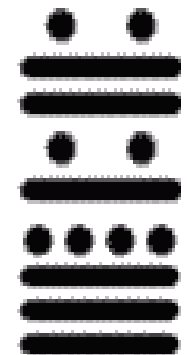
Tabliczka
zawierająca
długości
boków
trójkątów
prostokątnych.
Ok. 1800 lpne.



XIX - XVII wpne.

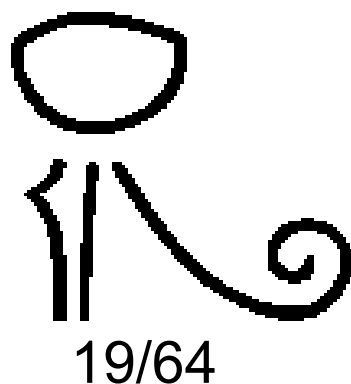
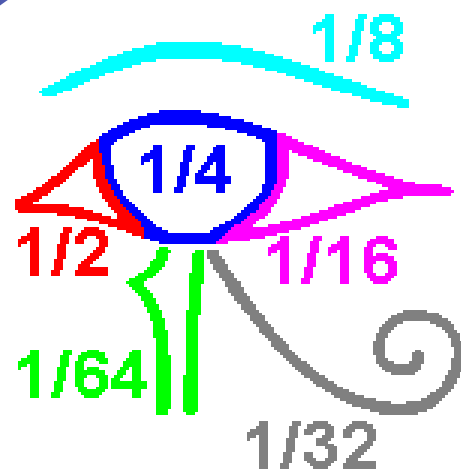
Liczby Majów.
System
dwudziestkowy
(dokładniej mieszany
piątkowo-czwórkowy)
Jako pierwsi
wynaleźli zero
(symbol muszli)
w naszym tego
słowa rozumieniu.

0 	1 	2 	3 	4 
5 	6 	7 	8 	9 
10 	11 	12 	13 	14 
15 	16 	17 	18 	19 
20 	21 	22 	23 	24 
25 	26 	27 	28 	29 



4959
czy
4479??

Egipt, pra-początki ok. 6000 Ipne
Starego Państwa ok. 2700 Ipne.

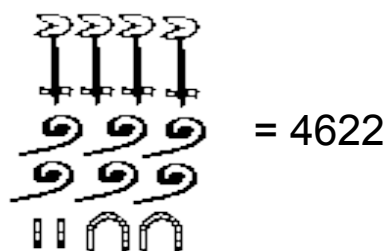
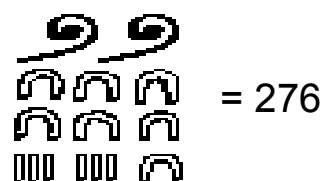


Egyptian Hieratic Numerals

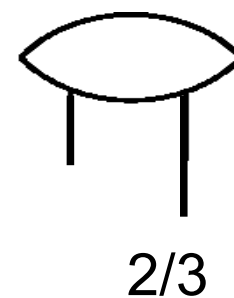
1	I	10	Λ	100	—	1000	ⲙ
2	II	20	λ	200	—	2000	ⲙ
3	III	30	χ	300	—	3000	ⲙ
4	IIII	40	ⲗ	400	—	4000	ⲙ
5	ⲑ	50	ⲛ	500	—	5000	ⲙ
6	ⲑ	60	ⲛ	600	—	6000	ⲙ
7	ⲑ	70	ⲛ	700	—	7000	ⲙ
8	ⲑ	80	ⲛ	800	—	8000	ⲙ
9	ⲑ	90	ⲛ	900	—	9000	ⲙ

So, e.g. 1328 = ⲑⲗⲙⲙ

I	ⲑ	ⲑ	ⲑ	ⲑ	ⲑ	ⲑ
1	10	100	1000	10000	100000	10 ⁶
Egyptian numeral hieroglyphs						



„Usta” - część ułamkowa.



Grecja: system alfabetyczny, ~tyś. lpne.

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Σ	Ε	Θ
269		

β	ρκϰ
Μ	Μ
20000	1230000

Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϛ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

$\overline{\text{ΙΘΚΕ}}' =$
 $= 19/25$

Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϟ
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ξ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

$\sigma\gamma' =$
 $1/203$
 lub
 $200 + 1/3$

ιΑ	ιΒ	ιΓ	ιΔ	ιΕ	ιϚ	ιΖ	ιΗ	ιΘ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Liczby akrofoniczne,
 (475-325 lpne).

Γ	Δ	Η	Χ	Μ
Pente	Deka	Hekaton	Khilioi	Murioi
Πεντε	Δεκα	Ηεκατον	Χιλιοι	Μυριοι
5	10	100	1000	10000

I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII	Δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 - 10 in Greek acrophonic numbers									

Δ	Ϟ	Η	ΓϞ	Χ	Ϟ	Μ	Ϟ
10	50	100	500	1000	5000	10000	50000
Higher numbers and combining acrophonic numerals							

ϞϞΗϞΔΔΓΙΙΙ
5678 drachma

Liczby Rzymskie, przyjęte z etruskiego i zmodyfikowane ok 500 lpne.

Liczby arabskie (pochodzące z Indii jak sama nazwa wskazuje). Uff!

Indie, III wpne. liczby Brahmi.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	+	h	φ	?	5	?

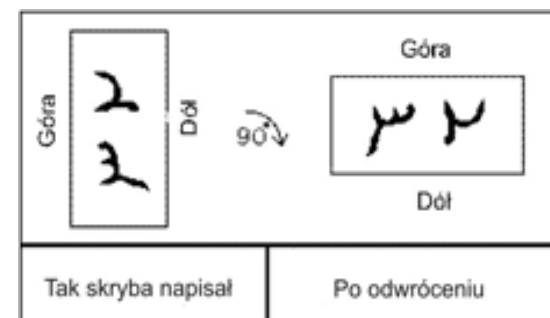
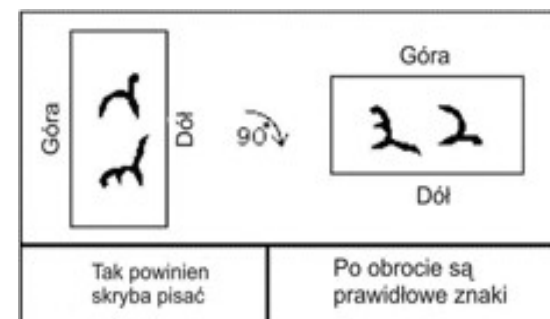
Pierwsze „trwałe” użycie zera, ok 870r. Indie środkowe.

Cyfry indyjskie ze wschodniej części imperium arabskiego 969r:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Kształt liczb około 100 lat później:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0



Hiszpania 976r. najstarsza europejska publikacja zawierająca liczby arabskie: *Codex Conciliorum Albeldensis seu Vigilanus*.

Sicut debemus in Indos subtilissimum Ingenium habere. cunctas
 gentes et in arithmetica et geometrica. et cunctis liberalibus
 disciplinis concedere. et hoc munusculum etiam in nobem
 figuris quibus designantur unum quodlibet gradum.
 cuiuslibet gradus quatuor hęc sunt forme

٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

Ewolucja liczb arabskich:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cod. Vigilus (976 C.E.)	I	7	3	4	5	6	7	8	9
Vatican MS. lat. 3101 (1077)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
British Mus. Add. 17808 (XII)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XIII	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XIV	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XV	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XVI	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Współcześnie używane systemy pozycyjne:

10: rządzi!

2,8,16: maszyny obliczeniowe;

12: pomiar czasu, mendel, itp.

60: miara kątowna, kopa, ...

Różne systemy liczenia - „dzielniki” do 20:

5:	1				5														
7:	1						7												
8:	1	2		4				8							16				
10:	1	2		4	5			8	10					16			20		
12:	1	2	3	4		6		8	9		12			16		18			
16:	1	2		4				8						16					
20:	1	2		4	5			8	10					16			20		
60:	1	2	3	4	5	6		8	9	10	12		15	16		18		20	

Cechy podzielności (na razie przy podstawie 10).

Tw. Liczba jest podzielna przez 2 / 5 / 10 wtedy i tylko wtedy gdy jej ostatnia cyfra jest podzielna odpowiednio przez 2 / 5 / 10.

Dowód: Niech nasza liczba będzie postaci $c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$. Wtedy:

$$c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_n c_{n-1} \dots c_1 \cdot 10 + c_0.$$

Tw. Liczba n jest podzielna przez 4 / 25 / 50 / 100 wtedy i tylko wtedy gdy liczba powstała z dwóch ostatnich cyfr liczby n jest podzielna odpowiednio przez 4 / 25 / 50 / 100.

Dowód: Niech n będzie postaci $c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$. Wtedy:

$$n = c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_n c_{n-1} \dots c_2 \cdot 100 + c_1 c_0.$$

Tw. Liczba jest podzielna przez 3 lub 9 wtedy i tylko wtedy gdy suma jej cyfr jest podzielna odpowiednio przez 3 lub 9.

Dowód: Niech nasza liczba będzie postaci $c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$. Wtedy:

$$\begin{aligned}
 n &= c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + c_2 \cdot 100 + c_1 \cdot 10 + c_0 = \\
 &= c_n \cdot (\underbrace{999 \dots 99}_{n} + 1) + c_{n-1} \cdot (\underbrace{999 \dots 9}_{n-1} + 1) + \dots + c_2 \cdot (99 + 1) + c_1 \cdot (9 + 1) + c_0 = \\
 &= (c_n \cdot 999 \dots 99 + c_n) + (c_{n-1} \cdot 999 \dots 9 + c_{n-1}) + \dots + (c_2 \cdot 99 + c_2) + (c_1 \cdot 9 + c_1) + c_0 = \\
 &= (c_n \cdot 111 \dots 11 + c_n + c_{n-1} \cdot 111 \dots 1 + c_{n-1} + \dots + c_1) \cdot 9 + (c_n + c_{n-1} + \dots + c_1 + c_0).
 \end{aligned}$$

Tw. Liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy gdy jest podzielna przez 2 i przez 3.

Dowód: Wynika z względnej pierwszości 2 i 3.

Def. Wielomianem rozkładu liczby n względem potęg liczby k nazwiemy wielomian którego współczynnikami są cyfry n zapisanej w systemie pozycyjnym o podstawie k .

Np. Wielomian rozkładu liczby $n=1514$ ma postać $w(x)=x^3+5x^2+x+4$.

Tw. Niech $w(x)$ wielomianem rozkładu liczby n . To n jest podzielne przez 7 wtedy i tylko wtedy gdy $w(3)$ jest podzielne przez 7.

Dowód: Niech n będzie postaci $c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$. Wtedy:

$$\begin{aligned} n &= c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0 = \\ &= c_n \cdot (7+3)^n + c_{n-1} \cdot (7+3)^{n-1} + \dots + c_2 \cdot (7+3)^2 + c_1 \cdot (7+3) + c_0 = \\ &= c_n \cdot (\alpha_n \cdot 7 + 3^n) + c_{n-1} \cdot (\alpha_{n-1} \cdot 7 + 3^{n-1}) + \dots + c_2 \cdot (\alpha_2 \cdot 7 + 3^2) + c_1 \cdot (7+3) + c_0 = \\ &= (c_n \cdot \alpha_n + c_{n-1} \cdot \alpha_{n-1} + \dots + c_2 \cdot \alpha_2 + c_1) \cdot 7 + (c_n \cdot 3^n + c_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \dots + c_2 \cdot 3^2 + c_1 \cdot 3 + c_0) = \\ &= (c_n \cdot \alpha_n + c_{n-1} \cdot \alpha_{n-1} + \dots + c_2 \cdot \alpha_2 + c_1) \cdot 7 + w(3). \end{aligned}$$

Czy 237458
dzieli się
przez 7??

	2	3	7	4	5	8
3	2	9	34	106	323	977

	9	7	7
3	9	34	109

	1	0	9
3	1	3	18

	1	8
3	1	11

	1	1
3	1	4