

# MiNI Akademia Matematyki na Politechnice Warszawskiej

KRZYSZTOF CHEŁMIŃSKI

W geometrii odpowiedni rysunek to połowa sukcesu

MiNI PW, 10.04.2010

## Kilka łatwych ale pożytecznych zadań

1. Wykaż, że kąt pomiędzy styczną i cięciwą jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie.
2. W trójkącie  $ABC$  zachodzi  $AB \neq AC$ . Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku  $A$  przecina się z symetralną boku  $BC$  na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ .
3. Wykaż, że dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta  $ABC$  są wysokościami trójkąta o wierzchołkach będących punktami przecięcia dwusiecznych z okręgiem opisanym na trójkącie  $ABC$ .
4. Niech  $AB$  i  $CD$  będą nieprzecinającymi się cięciwami w pewnym okręgu. Znajdź kąt pomiędzy prostymi  $AC$  i  $BD$ .

## Kilka nieco trudniejszych zadań

- 5.** Trójkąt  $ABC$  jest wpisany w okrąg. Wykaż, że odległość środka łuku  $BC$ , który nie zawiera punktu  $A$ , od środków okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$  i dopisanego do trójkąta  $ABC$  i stycznego do boku  $BC$  jest taka sama.
- 6.** Dwa okręgi styczne wewnętrznie w punkcie  $P$ . Cieniwa  $AB$  większego z nich jest styczna do mniejszego okręgu w punkcie  $Q$ . Wykaż, że kąty  $\angle APQ$  i  $\angle QPB$  są równe.
- 7.** Dwa okręgi  $o_1$  i  $o_2$  są styczne wewnętrznie do okręgu  $o$  w punktach  $P$  i  $Q$ . Cięciwa okręgu  $o$  nie przecina odcinka łączącego środki  $o_1$  i  $o_2$  i jest styczna do  $o_1$  i  $o_2$  w punktach  $A$  i  $B$ . Wykaż, że proste proste  $PA$  i  $QB$  przecinają się na okręgu  $o$ .

## Przykładowe zadania olimpijskie

- 8.** Cięciwy  $AC$  i  $BD$  są prostopadłe i przecinają się w punkcie  $I$ . Oznaczamy przez  $P, Q, R$  rzuty prostokątne  $I$  na  $AB$ ,  $BC$  i  $CD$  oraz przez  $N$  środek  $AD$ . Wykaż, że punkty  $N, P, Q, R$  leżą na jednym okręgu.
- 9.** (50 OM) Punkt  $D$  leży na boku  $BC$  trójkąta  $ABC$  przy czym  $AD > BC$ . Punkt  $E$  leży na boku  $AC$  i spełnia  $AE/EC = BD/(AD - BC)$ . Wykaż, że  $AD > BE$ .
- 10.** (49 OM) Punkty  $D, E$  leżą na boku  $AB$  trójkąta  $ABC$  i spełniają  $AD/DB \cdot AE/EB = (AC/CB)^2$ . Wykaż że kąty  $\angle ACD$  i  $\angle BCE$  są równe.
- 11.** (57 OM) Punkt  $C$  jest środkiem odcinka  $AB$ . Okrąg  $o_1$  przechodzący przez  $A$  i  $C$  przecina okrąg  $o_2$  przechodzący przez  $B$  i  $C$  w punktach  $C$  i  $D$ . Punkt  $P$  jest środkiem łuku  $AD$  okręgu  $o_1$ , który nie zawiera  $C$ .  $Q$  jest środkiem łuku  $BD$  okręgu  $o_2$ , który nie zawiera  $C$ . Wykaż, że  $PQ$  i  $CD$  są prostopadłe.
- 12.** Na bokach trójkąta  $ABC$  zbudowano prostokąty  $ABB_1A_1$ ,  $BB_2C_1C$  i  $CC_2A_2A$ . Wykaż, że symetralne odcinków  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  i  $C_1C_2$  przecinają się w jednym punkcie.

## Negatywny przykład

**13.** W sześciokącie wypukłym  $ABCDEF$  przeciwległe boki są równoległe. Wykaż, że proste łączące środki przeciwległych boków przecinają się w jednym punkcie.

**Życzę wszystkim jak najwięcej udanych rysunków  
w analizie zadań geometrycznych.**

**Zapraszam na warsztaty.**

**Dziękuję za uwagę.**