Leszek Sidz. Politechnika 10.04.2010.

Rola rysunku w zadaniach geometrycznych.

1. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że AP + PB < AC + CB .
2. Znaleźć punkt P wewnątrz trójkąta ABC taki, że suma AP +BP +CP jest najmniejsza.
3. Skonstruować czworokąt wypukły ABCD mając długości boków i kąt miedzy prostymi AB i CD.
4. Udowodnić, że w dowolnym czworokącie wypukłym :
   $P_{ABCD} \leq \frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.
5. Udowodnić, że w dowolnym trójkącie ABC zachodzi $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$, gdzie p połowa obwodu trójkąta, h_a - wysokość opuszczona na bok a.
6. W trapezie ABCD boki BC i AD są równoległe, M – punkt przecięcia dwusiecznych kątów A i B, N – punkt przecięcia dwusiecznych kątów C i D. Udowodnić, że $2MN = |AB + CD - BC - AD|$.
7. W trapezie ABCD , AB || CD, dwusieczna kąta B jest prostopadła do boku AD i przecina go w punkcie E, przy czym AE=2 ED. Wyznacz stosunek pól powierzchni figur na jakie dzieli prosta BE trapez ABCD.
8. (OM 51) W trójkącie ABC kąty ACB i ABC są równe. Punkt D na boku BC taki, że kąt BAD jest równy połowie kąta ABC. Udowodnij, że $\frac{1}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.
9. (OM 54) A, B, C leżą na jednym okręgu. Styczne w punktach A i B przecinają się w punkcie P, styczna w C przecina prostą AB w punkcie Q. Udowodnić, że $PQ^2 = PB^2 + QC^2$.
10. Dany czworokąt wypukły ABCD. Znaleźć miejsce geometryczne punktów M takich, że $P_{ABM} = P_{CDM}$.
11. ()M Rosja 93) Odcinki AB i CD długości 1 przecinają się w punkcie O, przy czym kąt AOC = 60 ^{o}. Udowodnij, że AC + BD $\geq$ 1.
12. (OM Rosja 94). Dane są punkty A, B, C, D takie, że AC < AD , BC < BD. Udowodnij, że dla dowolnego punktu wewnętrznego M odcinka AB zachodzi nierówność CM < DM.
13. (W. Brytania 1995) W czworokącie ABCD wpisanym w okrąg AB= BD. M jest rzutem prostokątnym B na AC. Udowodnij, że AM = DC + CM.
14. (Kanada , 1997) Wewnątrz równoległoboku ABCD obrano punkt O taki, że kąt AOB + kąt COD = 180. Udowodnij, że kąty OBC i ODC są równe.
15. (Hiszpania 1991) Na zewnątrz trójkąta ABC budujemy na jego bokach AB i AC kwadraty ABPE i ACRD. M i N to środki BC i ED . Udowodnij, że prosta AM jest prostopadła do prostej ED.