Tematy do opracowania na warsztatach 2010.05.08.
Wydział MiNI PW
Temat: Całka i szczęście.

1. **Zaprojektować system mierzenia ilości szczęścia dla indywidualnych osób.**

   Wskazówki:
   Projekt powinien zawierać między innymi

   - Wyjaśnienie teoretyczne podstaw działania systemu.
   - Sposób pobierania informacji o nastroju uzytkownika (ręczny lub automatyczny). Nie powinien on być uciążliwy dla użytkownika, najlepiej jeśli robiłyby to jakieś czujniki automatycznie, na przykład kamera i program odczytujący nastrój z obrazu twarzy. Program mógłby się na początku uczyć rozpoznawania humoru użytkownika.
   - Opis interfejsu użytkownika.
   - Algorytm przetwarzania danych.
   - Sposób prezentacji wyników.
   - Plan wprowadzenia produktu na rynek.

2. **Uzasadnić, że funkcja górnej granicy całkowania jest ciągła.**

   Wskazówki:
   Zakładamy, że całkowana funkcja $f : [a, b] \to R$ jest ograniczona, to znaczy istnieje stała $M \geqslant 0$ taka, że dla wszystkich x z przedziału $[a, b]$

   $$-M \leqslant f(x) \leqslant M$$

   (Dla tego rodzaju całek, o których tu mówimy, zawsze przyjmuje się, że ten warunek jest spełniony.)
   Spróbować znaleźć prostokąt zawierający zaciemnioną figurę (Rys. 2) i którego pole będzie się zmniejszało do zera, kiedy punkt u będzie się przybliżał do punktu u_0.

3. **Uzasadnić, że jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie u, to funkcja**

   $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

   ma w punkcie u pochodną równą $f(u)$.

Wskazówki:
Spróbować wykorzystać fakt, że licznik ilorazu różniczkowego

$$\frac{F(u+h)-F(u)}{h}$$

odpowiada polu figury, która niemal jest prostokątem (Rys. 3).
Co się dzieje z ilorazem różnicowym, kiedy h jest coraz bliższe zeru?

4. **Uzasadnić, że jeśli funkcja ma w jakimś punkcie pochodną, to jest w tym punkcie ciągła.**

Wskazówka:
Weźmy dowolny ciąg x_n zbieżny do punktu x_0, w którym funkcja f ma pochodną.
Możemy wprowadzić oznaczenie

$$u_n = \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} - f'(x_0)$$

Sprawdzić co dzieje się z u_n, kiedy n rośnie do nieskończoności.
Wyliczyć z powyższej równości $f(x_n)$ i zastanowić się, co się dzieje, kiedy n rośnie do nieskończoności.

5. **Znaleźć pole pod wykresem funkcji $y = x^n$ na przedziale $[0, 1]$, przy czym n jest dowolną liczbą naturalną.**

Wskazówki:
Znaleźć wzór na pochodną funkcji $f(x) = x^p$. W tym celu można skorzystać ze wzoru

$$u^p - v^p = (u-v)(u^{p-1} + u^{p-2}v + u^{p-3}v^2 + \ldots + uv^{p-2} + v^{p-1})$$

Korzystając ze wzoru na znalezioną pochodną odgadnąć funkcję, której pochodna ma postać x^n.
Skorzystać ze wzoru wiążącego całkę z pochodną.

6. **Jak korzystając z Rysunku 4 „odkryć” wzór na pole koła?**

7. **Jak korzystając z Rysunku 5 „odkryć” wzór na pole koła?**

8. **Jak korzystając z Rysunku 6 „odkryć" wzór na pole koła?**

9. **Uzasadnić Zasadę Cavalieriego, która mówi, że jeśli dla dwóch figur płaskich istnieje prosta taka, że dla każdej prostej do niej równoległej przecięcie z jedną i drugą figurą jest odcinkiem o takiej samej długości (Rys. 7), to figury mają takie same pola powierzchni. (Dla różnych prostych w tej rodzinie te przecięcia mogą mieć różne długości.)**

   Wskazówki:
   Na Rysunku 7 rodzina prostych równoległych to proste pionowe.
   Zastanowić się jak zapisać pole takie figury przy pomocy całki, przy czym górne i dolne ograniczenie potraktować jako wykresy funkcji.

10. **Figura ma w przestrzeni kształt taki, jak na Rysunku 8, to znaczy jest ograniczona przez dwie płaszczyzny pionowe. Przypuśćmy, że znamy pole powierzchni przekroju każdej z płaszczyzn równoległych do tych dwóch z naszą figurą. Jakim wzorem można wtedy wyrazić jej objętość?**
    Na tej podstawie można sformułować Zasadę Cavalieriego w przestrzeni.

    Wskazówki:
    Można sobie wyobrazić, że figura składa się z wielu bardzo cienkich plasterków, a każdy z nich jest walcem (krzywoliniowym) o znanym polu podstawy.

11. **W każdym punkcie (x, y) prostokąta, jak na Rysunku 9, dana jest nieujemna liczba $f(x, y)$, a powstała w ten sposób funkcja jest ciągła.**
    Podać interpretację każdej z całek

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \quad , \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

    i uzasadnić stąd ich równość.

    Wskazówki:
    Zastanowić się najpierw jak zinterpretować dla każdego ustalonego x całkę

$$\int_c^d f(x,y)\,dy$$

i dla każdego ustalonego y całkę

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

Skorzystać z rozwiązania problemu, w którym wyznacza się objętość figury znając jej przekroje płaszczyznami.

12. **Rozważamy ruch jednostajnie przyśpieszony, prostoliniowy, z prędkością początkową równą zero, to znaczy prędkość w każdej chwili $t \geqslant 0$ dana jest wzorem $v(t) = at$.**
Uzasadnić, że odcinki drogi przebyte w równych odcinkach czasu, począwszy od chwili zerowej, są do siebie w proporcji kolejnych liczb nieparzystych $(1 : 3 : 5 : \ldots)$, a odcinki drogi przebytej od początku są w proporcji kolejnych kwadratów liczb naturalnych $(1 : 4 : 9 : \ldots)$.

    Wskazówki:
    Skorzystać z tego, że droga jest całką prędkości i z interpretacji całki jako pola pod wykresem. Skorzystać z sugestii podanych na Rysunku 10.

13. **Uzasadnić, że w ruchu prostoliniowym, jednostajnie przyśpieszonym, istnieje taka prędkość stała w czasie pomiędzy a i b, dzięki której przybyłoby się taki sam odcinek drogi.**

    Uzasadnić, że jeśli funkcja f jest ciągła na odcinku $[a, b]$, to istnieje taka wartość u w tym przedziale, że

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(u) \cdot (b - a)$$

    Wskazówki:
    Sposób uzasadnienia jest podpowiedziany na Rysunku 11.

14. **Uzasadnić, że**

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots = 1$$

    Wskazówki:

Przedstawić inaczej ułamek $\frac{1}{n(n+1)}$ (jako różnicę dwóch ułamków). Podstawić te reprezentacje do skończonej sumy

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{p(p+1)}$$

i spróbować uprościć to wyrażenie.

Uzasadnić, że

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=+\infty$$

Wskazówki:
Skorzystać z sugestii poniżej (uzasadnij te nierówności) :

$$\begin{array}{lcc}
\frac{1}{3}+\frac{1}{4} & > & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} & > & \frac{1}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}+\frac{1}{2^{k+1}} & > & \frac{1}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

15. **Odcinek $[a,b]$ dzielimy na n równych części i zastępujemy całkę, tak jak na rysunkach 12 i 13, przez**

- **sumę pól prostokątów (metoda prostokątów);**
- **sumę pól trapezów (metoda trapezów).**

Napisać odpowiednie wzory na te sumy.
Napisać program (jeśli znasz jakiś język programowania) na obliczanie takich sum; zbadać zachowanie się błędu bezwzględnego i względnego przy rosnącym n dla kilku przykładowych funkcji.