

WSPÓŁRZĘDNE KARTEZJAŃSKIE W $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\};$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\};$$

$$\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) : x, y, z, w \in \mathbb{R}\}.$$

ODLEGŁOŚĆ PUNKTÓW W PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ

$\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$

Odległość punktów $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ w $\mathbb{R}^2$:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Odległość punktów $A = (x_A, y_A, z_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B)$ w $\mathbb{R}^3$:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Odległość punktów $A = (x_A, y_A, z_A, w_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B, w_B)$ w $\mathbb{R}^4$:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 + (w_A - w_B)^2}$$

ZBIORY IZOMETRYCZNE

Zakładamy, że $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Będziemy mówili, że zbiory X i Y są izometryczne (inaczej, przystające), jeśli istnieje funkcja f z X na Y która zachowuje odległość między punktami, tzn. f spełnia warunek:

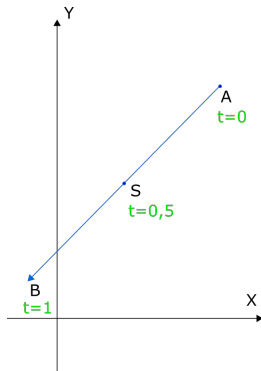
$$\forall A, B \in X \quad d(A, B) = d(f(A), f(B))$$

(dla dowolnych dwóch punktów $A, B \in X$ odległość punktów A i B jest taka sama, jak odległość punktów $f(A)$ i $f(B)$).

Przykładowo, dwa trójkąty są przystające, jeśli długości boków w pierwszym trójkącie są takie, jak długości odpowiednich boków w drugim trójkącie.

Odcinek w $\mathbb{R}^n$ jest to zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ izometryczny z przedziałem domkniętym $\langle A, B \rangle \subset \mathbb{R}$. Dwa odcinki są izometryczne wtedy i tylko wtedy, gdy są jednakowej długości.

Odcinek o końcach A i B w $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wszystkich punktów postaci $A + t \cdot \overrightarrow{AB}$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$



Operacje na punktach i wektorach w $\mathbb{R}^4$ określone są podobnie jak w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Prosta w $\mathbb{R}^n$ jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$ izometrycznym z prostą $\mathbb{R}$.

Płaszczyzna w $\mathbb{R}^n$ jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$ izometrycznym z płaszczyzną $\mathbb{R}^2$.

Trójwymiarowa hiperpłaszczyzna w $\mathbb{R}^4$ jest to zbiór $H \subset \mathbb{R}^4$ izometryczny z przestrzenią $\mathbb{R}^3$

Wymienione powyżej zbiory są wypukłe (zbiór X jest wypukły, jeśli dla dowolnych punktów $A, B \in X$ łączący je odcinek jest zawarty w X).

Przez każde 2 punkty w $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$, można przeprowadzić prostą.

Przez każde 3 punkty w $\mathbb{R}^n$, $n = 3, 4$, można przeprowadzić co najmniej jedną płaszczyznę.

Przez każde 4 punkty w $\mathbb{R}^n$, $n = 4$, można przeprowadzić co najmniej jedną hiperpłaszczyznę trójwymiarową.

Wzory określające iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ w $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$:

$$[x_u, y_u] \circ [x_v, y_v] = x_u x_v + y_u y_v$$

$$[x_u, y_u, z_u] \circ [x_v, y_v, z_v] = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$[x_u, y_u, z_u, w_u] \circ [x_v, y_v, z_v, w_v] = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v + w_u w_v$$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

gdzie $|\vec{u}| = \sqrt{u \circ u}$, $|\vec{v}| = \sqrt{v \circ v}$ to długości wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, zaś α jest kątem między $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Zatem jeśli wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są niezerowe, to zachodzi równość

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

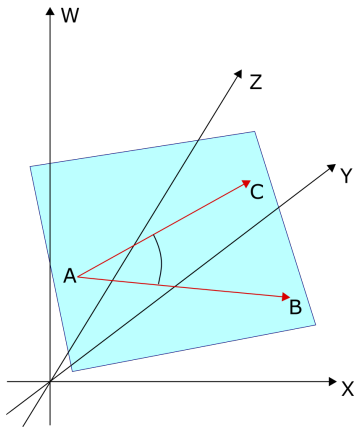
Z równości $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ wynika, że

a) wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe $\iff \vec{u} \circ \vec{v} = 0$

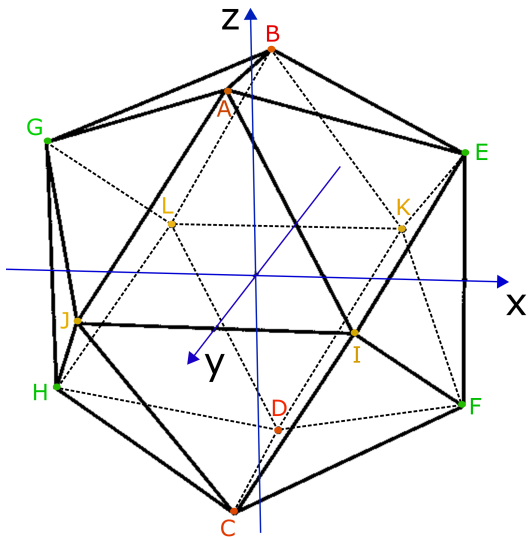
b) kąt między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest ostry $\iff \vec{u} \circ \vec{v} > 0$

c) kąt między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest rozwarty $\iff \vec{u} \circ \vec{v} < 0$

Kąt między odcinkami $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ w $\mathbb{R}^4$ określamy następująco:
przeprowadzamy płaszczyznę P przechodzącą przez punkty A, B i C , a
następnie mierzymy kąt między $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ na płaszczyźnie P .

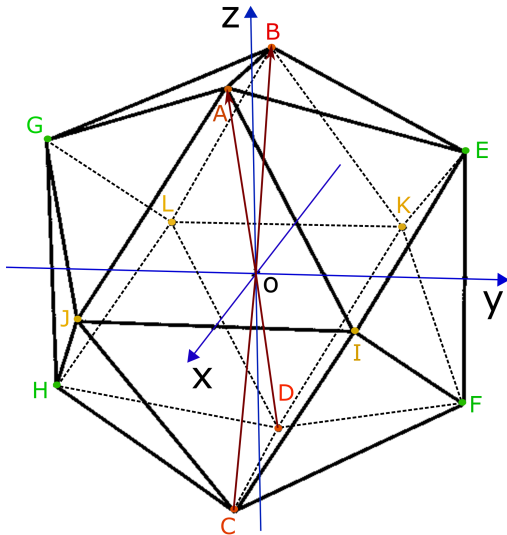


Przykład 1. Obliczymy cosinus kąta między przekątnymi w dwudziestościanie foremym.



$$\begin{aligned} A &= (0, 1, \varphi), B = (0, -1, \varphi), \\ C &= (0, 1, -\varphi), D = (0, -1, -\varphi), \\ E &= (\varphi, 0, 1), F = (\varphi, 0, -1), \\ G &= (-\varphi, 0, 1), H = (-\varphi, 0, -1), \\ I &= (1, \varphi, 0), J = (-1, \varphi, 0), \\ K &= (1, -\varphi, 0), L = (-1, -\varphi, 0) \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



$A=(0,1,\varphi)$, $B=(0,-1,\varphi)$,
 $C=(0,1,-\varphi)$, $D=(0,-1,-\varphi)$,
 $E=(\varphi,0,1)$, $F=(\varphi,0,-1)$,
 $G=(-\varphi,0,1)$, $H=(-\varphi,0,-1)$,
 $I=(1,\varphi,0)$, $J=(-1,\varphi,0)$,
 $K=(1,-\varphi,0)$, $L=(-1,-\varphi,0)$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\overrightarrow{OA} = [0, 1, \varphi], \quad \overrightarrow{OB} = [0, -1, \varphi]$$

$$\cos \beta = \frac{[0,1,\varphi] \circ [0,-1,\varphi]}{\sqrt{0^2+1^2+\varphi^2} \cdot \sqrt{0^2+(-1)^2+\varphi^2}} = \frac{\varphi^2-1}{\varphi^2+1}$$

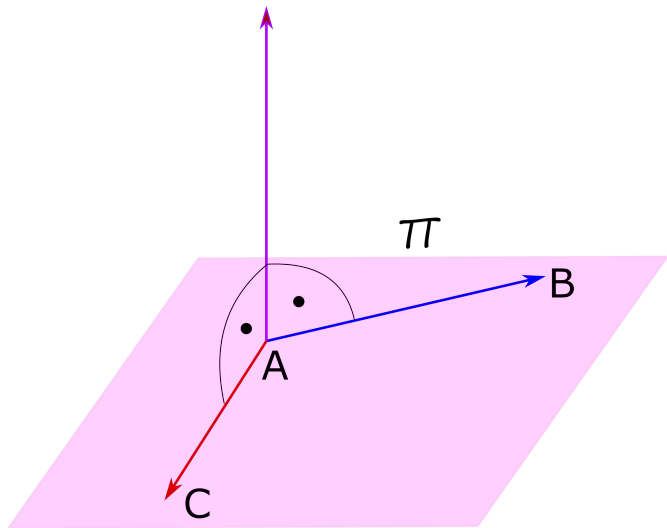
$$(\varphi)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

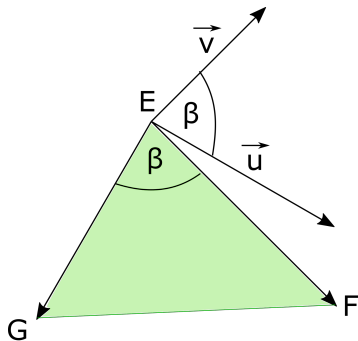
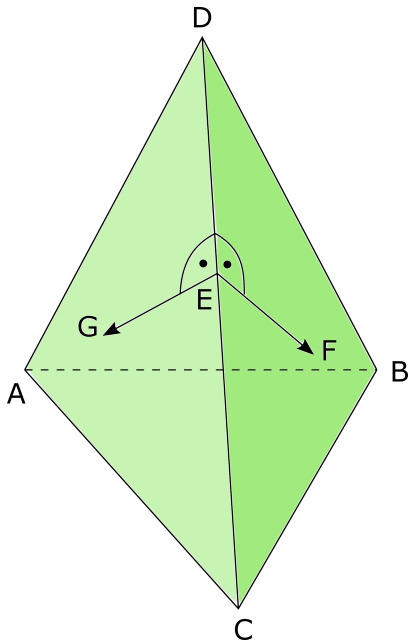
$$\cos \beta = \frac{\frac{\sqrt{5}+3}{2} - \frac{2}{2}}{\frac{\sqrt{5}+3}{2} + \frac{2}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\frac{\sqrt{5}+5}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{25-5} = \frac{4\sqrt{5}}{20} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Twierdzenie. Dla dowolnej prostej $L \subset \mathbb{R}^2$ istnieje niezerowy wektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ prostopadły do L . Dodatkowo każdy wektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ prostopadły do L musi być postaci $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie. Dla dowolnej płaszczyzny $P \subset \mathbb{R}^3$ istnieje niezerowy wektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ prostopadły do P . Dodatkowo każdy wektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ prostopadły do P musi być postaci $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie. Dla dowolnej hiperpłaszczyzny trójwymiarowej $H \subset \mathbb{R}^4$ istnieje niezerowy wektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ prostopadły do H . Dodatkowo każdy wektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$ prostopadły do H musi być postaci $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{R}$.

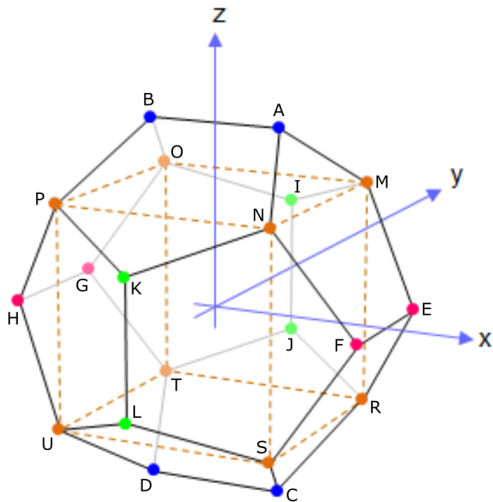




$$\vec{u} \perp P_{ACD}$$

$$\vec{v} \perp P_{CBD}$$

Przykład 2. Obliczymy cosinus kąta między ścianami w dwunastościanie foremnym.



$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$A=(\varphi-1,0,\varphi)$, $B=(1-\varphi,0,\varphi)$,
 $C=(\varphi-1,0,-\varphi)$, $D=(1-\varphi,0,-\varphi)$,
 $E=(\varphi,\varphi-1,0)$, $F=(\varphi,1-\varphi,0)$,
 $G=(-\varphi,\varphi-1,0)$, $H=(-\varphi,1-\varphi,0)$,
 $I=(0,\varphi,\varphi-1)$, $J=(0,\varphi,1-\varphi)$,
 $K=(0,-\varphi,\varphi-1)$, $L=(0,-\varphi,1-\varphi)$,
 $M=(1,1,1)$, $N=(1,-1,1)$,
 $O=(-1,1,1)$, $P=(-1,-1,1)$,
 $R=(1,1,-1)$, $S=(1,-1,-1)$,
 $T=(-1,1,-1)$, $U=(-1,-1,-1)$

Znajdę dwa niezerowe wektory: $\vec{v} \perp P_{ABM}$ i $\vec{w} \perp P_{ABN}$.

Oznaczę szukane współrzędne wektora $\vec{v}$ przez a, b, c , wtedy

$\vec{v} = [a, b, c]$. Wtedy zachodzą równości:

$$\vec{v} \circ \vec{AB} = 0, \quad \vec{v} \circ \vec{AM} = 0,$$

$$\vec{AB} = [2 - 2\varphi, 0, 0], \quad \vec{AM} = [2 - \varphi, 1, 1 - \varphi]$$

Stąd wynika, że

$$[a, b, c] \circ [2 - 2\varphi, 0, 0] = 0, \quad [a, b, c] \circ [2 - \varphi, 1, 1 - \varphi] = 0$$

Stąd uzyskujemy układ równań:

$$\begin{cases} (2 - 2\varphi) \cdot a = 0 \\ (2 - \varphi) \cdot a + 1 \cdot b + (1 - \varphi) \cdot c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + (1 - \varphi) \cdot c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + (1 - \varphi) \cdot c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = (\varphi - 1) \cdot c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = (\varphi - 1) \cdot c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = (\varphi - 1) \cdot c \end{cases}$$

Jeśli przyjmę np. $c = 1$ to uzyskam wektor $\vec{v} = [0, \varphi - 1, 1]$

Podobnie, oznaczę współrzędne wektora $\vec{w}$ przez d, e, f , wtedy

$\vec{w} = [d, e, f]$. Wtedy zachodzą równości:

$$\vec{w} \circ \vec{AB} = 0, \vec{w} \circ \vec{AN} = 0,$$

$$\vec{AB} = [2 - 2\varphi, 0, 0], \vec{AN} = [2 - \varphi, -1, 1 - \varphi]$$

Stąd wynika, że

$$[d, e, f] \circ [2 - 2\varphi, 0, 0] = 0, [d, e, f] \circ [2 - \varphi, -1, 1 - \varphi] = 0$$

Stąd uzyskujemy układ równań:

$$\begin{cases} (2 - 2\varphi) \cdot d = 0 \\ (2 - \varphi) \cdot d - 1 \cdot e + (1 - \varphi) \cdot f = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ -e + (1 - \varphi) \cdot f = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ e = (1 - \varphi) \cdot f \end{cases}$$

Jeśli przyjmę np. $f = 1$ to uzyskam wektor $\vec{w} = [0, 1 - \varphi, 1]$

Sprawdzam teraz znak iloczynów:

$$\vec{v} \circ \vec{AN} = [0, \varphi - 1, 1] \circ [2 - \varphi, -1, 1 - \varphi] = -\varphi + 1 + 1 - \varphi = 2 - 2\varphi < 0$$

$$\vec{w} \circ \vec{AM} = [0, 1 - \varphi, 1] \circ [2 - \varphi, 1, 1 - \varphi] = 1 - \varphi + 1 - \varphi = 2 - 2\varphi < 0$$

Wynika stąd, że jeśli zaczepimy wektor $\vec{v}$ w punkcie A to będzie on tworzył z wektorem $\vec{AN}$ kąt rozwarty, czyli koniec tego wektora nie znajduje się po tej stronie płaszczyzny P_{ABM} po której znajduje się dwunastościan.

Podobnie stwierdzamy, że koniec wektora $\vec{w}$ zaczepionego w punkcie A nie znajduje się po tej stronie płaszczyzny P_{ABN} po której znajduje się dwunastościan. Zatem żeby obliczyć kąt między ścianami muszę jeden z tych wektorów zamienić na wektor przeciwny, wezmę np.

$$\vec{u} = -\vec{w} = [0, \varphi - 1, -1]$$

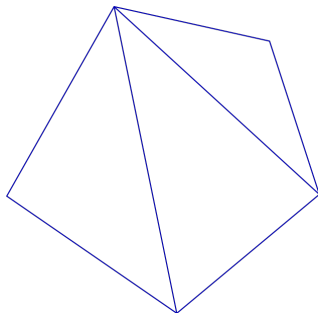
$$\cos \beta = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{[0, \varphi-1, -1] \circ [0, \varphi-1, 1]}{\sqrt{0^2 + (\varphi-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + (\varphi-1)^2 + 1^2}} = \frac{(\varphi-1)^2 - 1}{(\varphi-1)^2 + 1}$$

$$(\varphi - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{2}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{-\sqrt{5}+3}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{-\sqrt{5}+3}{2} - \frac{2}{2}}{\frac{-\sqrt{5}+3}{2} + \frac{2}{2}} = \frac{\frac{-\sqrt{5}+1}{2}}{\frac{-\sqrt{5}+5}{2}} = \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{25-5} =$$

$$\frac{-4\sqrt{5}}{20} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

Każdy wielokąt w $\mathbb{R}^2$ można przedstawić jako skończoną sumę trójkątów.

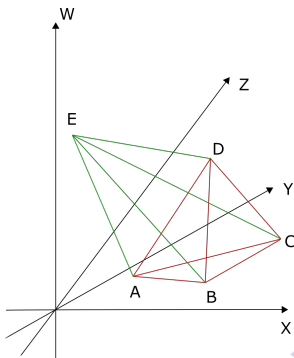


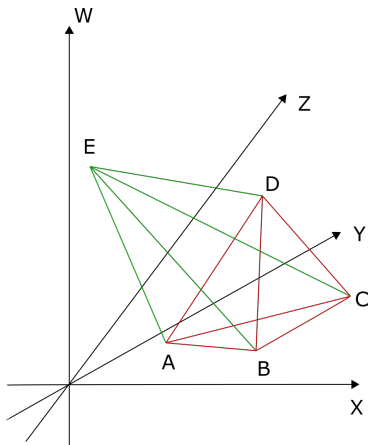
Każdy wielościan w $\mathbb{R}^3$ można przedstawić jako skończoną sumę czworościanów (czyli ostrosłupów o podstawie trójkąta).

Jak wygląda czterowymiarowy odpowiednik odcinka, trójkąta i czworościanu?

4-wymiarowym sympleksem S w $\mathbb{R}^4$ nazywamy zbiór utworzony następująco:

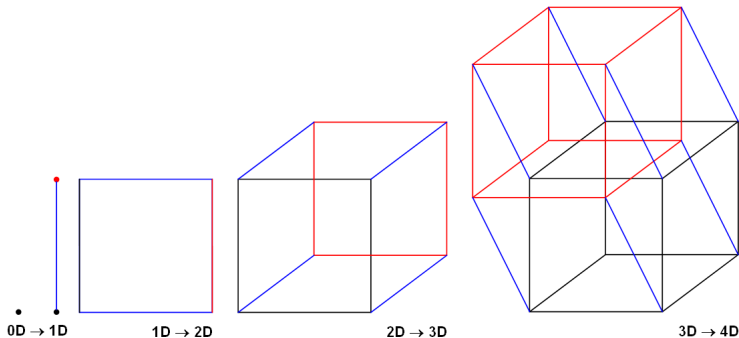
Rozważamy dowolne 4 punkty A, B, C, D w $\mathbb{R}^4$ które nie leżą na jednej płaszczyźnie oraz trójwymiarową hiperpłaszczyznę H zawierającą te punkty. W zbiorze H możemy utworzyć czworościan (czyli ostrosłup o podstawie trójkąta) którego wierzchołkami są A, B, C i D . Weźmy teraz dowolny punkt E który leży poza H . S będzie sumą wszystkich odcinków łączących punkt E z punktami należącymi do opisanego powyżej czworościanu.



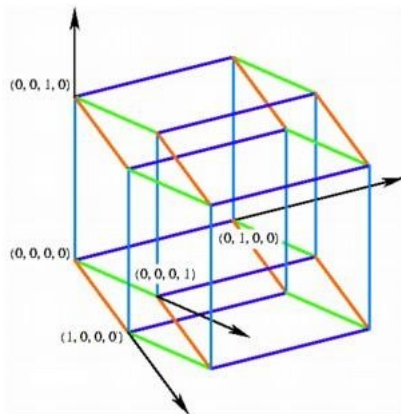


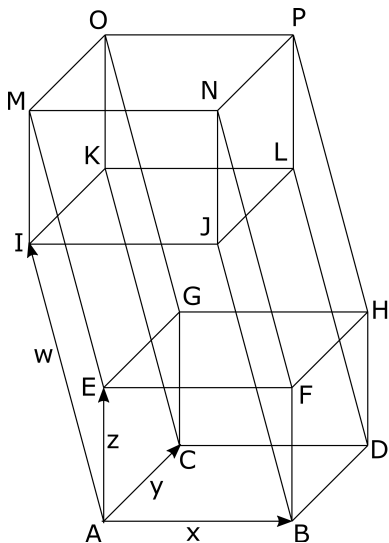
Sympleks 4-wymiarowy S ma 5 ścian wymiaru 3, które są czworościanami o wierzchołkach należących do zbioru $\{A, B, C, D, E\}$. Ściany tych czworościanów, ich krawędzie i wierzchołki będziemy również nazywać ścianami S (odpowiednio wymiaru 2, 1 i 0).

Hipersześciánem o krawędzi $a > 0$ w $\mathbb{R}^4$ jest zbiór wszystkich punktów których wszystkie współrzędne należą do przedziału $< 0, a >$, a także dowolny zbiór izometryczny z opisanym.



Przykład 3. Obliczymy kąt między dwiema przekątnymi w hiperkostce w $\mathbb{R}^4$, wychodzącymi z dwóch wierzchołków połączonych wspólną krawędzią.





$A=(0,0,0,0)$, $B=(1,0,0,0)$,
 $C=(0,1,0,0)$, $D=(1,1,0,0)$,
 $E=(0,0,1,0)$, $F=(1,0,1,0)$,
 $G=(0,1,1,0)$, $H=(1,1,1,0)$,
 $I=(0,0,0,1)$, $J=(1,0,0,1)$,
 $K=(0,1,0,1)$, $L=(1,1,0,1)$,
 $M=(0,0,1,1)$, $N=(1,0,1,1)$,
 $O=(0,1,1,1)$, $P=(1,1,1,1)$

Weźmy np. przekątną o końcach $A = [0, 0, 0, 0]$ i $P = [1, 1, 1, 1]$ oraz drugą przekątną o końcach $I = [0, 0, 0, 1]$ i $H = [1, 1, 1, 0]$, oznaczmy:

$$u = \overrightarrow{AP} = [1 - 0, 1 - 0, 1 - 0, 1 - 0] = [1, 1, 1, 1],$$

$$v = \overrightarrow{IH} = [1 - 0, 1 - 0, 1 - 0, 0 - 1] = [1, 1, 1, -1].$$

Wtedy szukany kąt jest kątem α między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$, a zatem:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

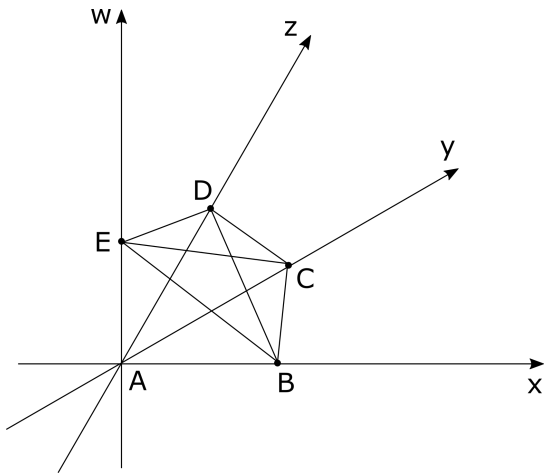
Stąd mamy

$$\cos \alpha = \frac{[1, 1, 1, 1] \circ [1, 1, 1, -1]}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1 + 1 + 1 - 1}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Stąd mamy równość

$$\alpha = 60^\circ$$

Przykład 4. Obliczę kąt między nieprostokątnymi trójwymiarowymi ścianami sympleksu o wierzchołkach $A = (0, 0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0, 0)$, $D = (0, 0, 1, 0)$ i $E = (0, 0, 0, 1)$.



Znajdę dwa niezerowe wektory $\vec{v} \perp H_{ABCD}$ i $\vec{w} \perp H_{BCDE}$.

Oznaczę szukane współrzędne wektora $\vec{v}$ przez a, b, c, d , wtedy

$\vec{v} = [a, b, c, d]$. Wtedy zachodzą równości:

$$\vec{v} \circ \vec{AB} = 0, \vec{v} \circ \vec{AC} = 0, \vec{v} \circ \vec{AD} = 0$$

$$\vec{AB} = [1, 0, 0, 0], \vec{AC} = [0, 1, 0, 0], \vec{AD} = [0, 0, 1, 0]$$

Stąd wynika, że

$$[a, b, c, d] \circ [1, 0, 0, 0] = 0, [a, b, c, d] \circ [0, 1, 0, 0] = 0,$$

$$[a, b, c, d] \circ [0, 0, 1, 0] = 0,$$

Stąd uzyskujemy układ równań:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Jeśli przyjmę np. $d = 1$ to uzyskam wektor $\vec{v} = [0, 0, 0, 1]$

$$\text{Obliczam teraz iloczyn } \vec{v} \circ \vec{AE} = [0, 0, 0, 1] \circ [0, 0, 0, 1] = 1 > 0$$

Oznaczę szukane współrzędne wektora $\vec{w}$ przez e, f, g, h , wtedy $\vec{w} = [e, f, g, h]$. Wtedy zachodzą równości:

$$\vec{w} \circ \vec{BC} = 0, \vec{w} \circ \vec{BD} = 0, \vec{w} \circ \vec{BE} = 0$$
$$\vec{BC} = [-1, 1, 0, 0], \vec{BD} = [-1, 0, 1, 0], \vec{BE} = [-1, 0, 0, 1]$$

Stąd wynika, że

$$[e, f, g, h] \circ [-1, 1, 0, 0] = 0, [e, f, g, h] \circ [-1, 0, 1, 0] = 0,$$
$$[e, f, g, h] \circ [-1, 0, 0, 1] = 0,$$

Stąd uzyskujemy układ równań:

$$\begin{cases} -e + f = 0 \\ -e + g = 0 \\ -e + h = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} e = f \\ e = g \\ e = h \end{cases}$$

Jeśli przyjmę np. $e = 1$ to uzyskam wektor $\vec{w} = [1, 1, 1, 1]$

Obliczam teraz iloczyn $\vec{w} \circ \vec{EA} = [1, 1, 1, 1] \circ [0, 0, 0, -1] = -1 < 0$

Szukam kąta α między wektorami $\vec{v} = [0, 0, 0, 1]$ i $\vec{w} = [1, 1, 1, 1]$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \circ \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{[0, 0, 0, 1] \circ [1, 1, 1, 1]}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{0 + 0 + 0 + 1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2},$$

czyli $\alpha = 60^\circ$.