## WSPÓŁRZĘDNE KARTEZJAŃSKIE W $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4.$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\};$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\};$$

$$\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) : x, y, z, w \in \mathbb{R}\}.$$

# ODLEGŁOŚĆ PUNKTÓW W PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$

Odległość punktów $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ w $\mathbb{R}^2$:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Odległość punktów $A = (x_A, y_A, z_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B)$ w $\mathbb{R}^3$:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Odległość punktów $A = (x_A, y_A, z_A, w_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B, w_B)$ w $\mathbb{R}^4$:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 + (w_B - w_A)^2}$$

## WEKTORY W PRZESTRZENI $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$ i ich długość

W $\mathbb{R}^2$: długość wektora $\vec{v} = [x, y]$ to $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

W $\mathbb{R}^3$: długość wektora $\vec{v} = [x, y, z]$ to $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

W $\mathbb{R}^4$: długość wektora $\vec{v} = [x, y, z, w]$ to $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$

Wektor o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ w $\mathbb{R}^2$:

$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$

Wektor o końcach $A = (x_A, y_A, z_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B)$ w $\mathbb{R}^3$:

$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A]$

Wektor o końcach $A = (x_A, y_A, z_A, w_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B, w_B)$ w $\mathbb{R}^4$:

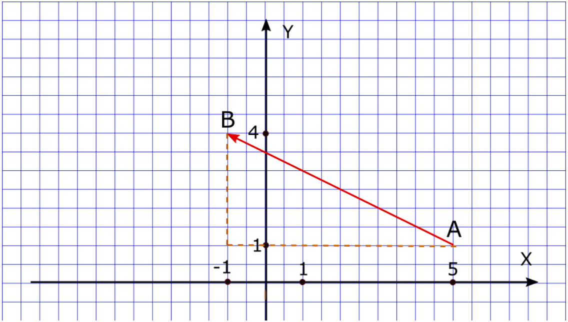
$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A, w_B - w_A]$

$$|\overrightarrow{AB}| = d(A, B)$$

**Przykład.** Obliczyć i narysować wektor $\overrightarrow{AB}$ gdzie $A = [5, 1]$, $B = [-1, 4]$ oraz obliczyć długość tego wektora.

$\overrightarrow{AB} = [-1 - 5, 4 - 1] = [-6, 3]$

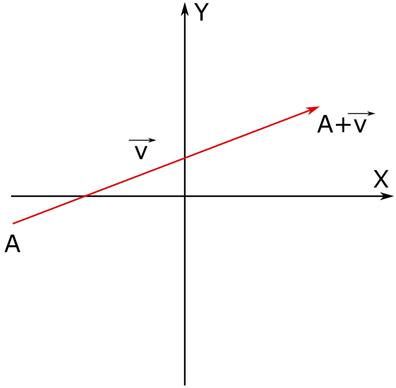
$\mid \overrightarrow{AB} \mid = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



# PRZESUNIĘCIE PUNKTU O WEKTOR

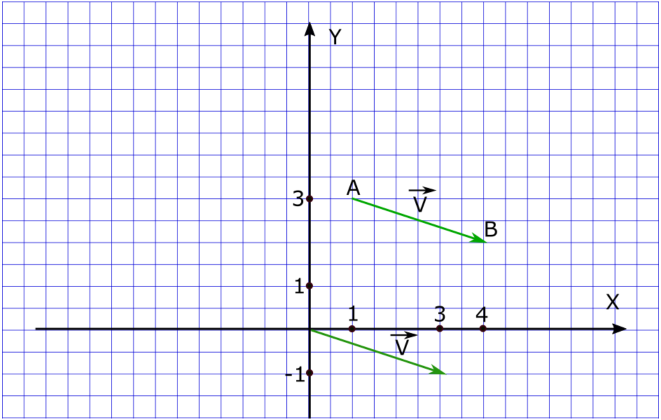
Dodawanie wektora $\overrightarrow{v} = [x_v, y_v]$ do punktu $A = (x_A, y_A)$ wykonujemy następująco: $A + \overrightarrow{v} = (x_A + x_v, y_A + y_v)$

Dodawanie wektora do punktu w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$ jest określone podobnie jak w $\mathbb{R}^2$. Punkt $A + \overrightarrow{v}$ jest końcem wektora $\overrightarrow{v}$ zaczepionego w punkcie $A$.



**Przykład.** Zaznaczyć w układzie współrzędnych wektor $\overrightarrow{v} = [3, -1]$ zaczepiony w punkcie $(0, 0)$ oraz wektor $\overrightarrow{v}$ zaczepiony w punkcie $A = (1, 3)$

Obliczam: $B = A + \overrightarrow{v} = (1 + 3, 3 + (-1)) = (4, 2)$



# OPERACJE NA WEKTORACH

Suma wektorów $\overrightarrow{v} = [x_v, y_v]$ i $\overrightarrow{w} = [x_w, y_w]$ to wektor $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = [x_v + x_w, y_v + y_w]$

Iloczyn wektora $\overrightarrow{v} = [x_v, y_v]$ przez skalar $c \in \mathbb{R}$ to wektor $c\overrightarrow{v} = [cx_v, cy_v]$.

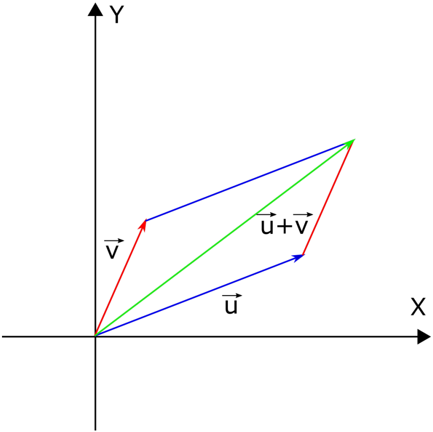
Powyższe operacje na wektorach w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$ określone są podobnie jak w $\mathbb{R}^2$.

**Przykład.** Dane są wektory $\overrightarrow{v} = [2, 1, 0, -3]$ i $\overrightarrow{w} = [3, -2, 7, 5]$. Obliczyć wektory $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, $3\overrightarrow{v}$ i $(-1)\overrightarrow{w}$.

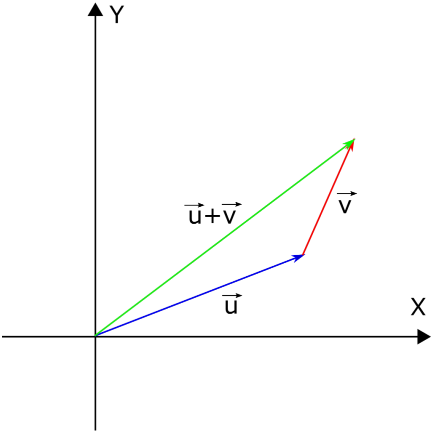
$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = [2, 1, 0, -3] + [3, -2, 7, 5] = [2 + 3, 1 - 2, 0 + 7, -3 + 5] = [5, -1, 7, 2]$

$3\overrightarrow{v} = 3[2, 1, 0, -3] = [6, 3, 0, -9]$

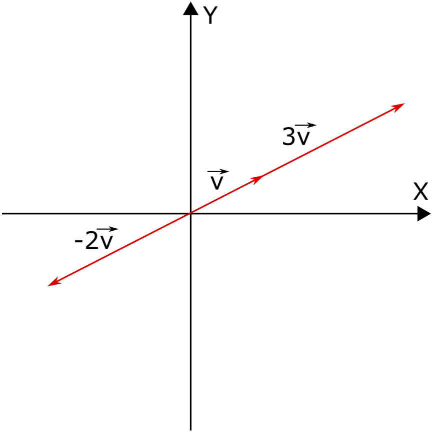
$(-1)\overrightarrow{w} = (-1)[3, -2, 7, 5] = [-3, 2, -7, -5]$




Dodawanie wektorów zgodnie z regułą równoległoboku.




Dodawanie wektorów zgodnie z regułą trójkąta.




Mnożenie wektora przez skalar.

## ZBIORY IZOMETRYCZNE

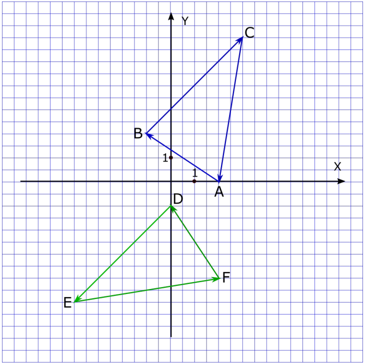
Zakładamy, że $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Będziemy mówili, że zbiory $X$ i $Y$ są izometryczne (inaczej, przystające), jeśli istnieje funkcja $f$ z $X$ na $Y$ która zachowuję odległość między punktami, tzn. $f$ spełnia warunek:

$$\forall A, B \in X \quad d(A, B) = d\big(f(A), f(B)\big)$$

(dla dowolnych dwóch punktów $A, B \in X$ odległość punktów $A$ i $B$ jest taka sama, jak odległość punktów $f(A)$ i $f(B)$).

Przykładowo, dwa trójkąty są przystające, jeśli długości boków w pierwszym trójkącie są takie, jak długości odpowiednich boków w drugim trójkącie.

**Przykład.** Sprawdzić, że trójkąty $\Delta ABC$ i $\Delta DEF$ są izometryczne, gdzie $A = (2, 0)$, $B = (-1, 2)$, $C = (3, 6)$, $D = (0, -1)$, $E = (-4, -5)$, $F = (2, -4)$, narysować te trójkąty.




Obliczam: $\overrightarrow{AB} = [-1 - 2, 2 - 0] = [-3, 2]$, $\overrightarrow{BC} = [3 - (-1), 6 - 2] = [4, 4]$, $\overrightarrow{CA} = [2 - 3, 0 - 6] = [-1, -6]$, $\overrightarrow{DE} = [-4 - 0, -5 - (-1)] = [-4, -4]$, $\overrightarrow{EF} = [2 - (-4), -4 - (-5)] = [6, 1]$, $\overrightarrow{FD} = [0 - 2, -1 - (-4)] = [-2, 3]$,

$$| \overrightarrow{AB} | = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13},$$

$$| \overrightarrow{BC} | = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$| \overrightarrow{CA} | = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{37},$$

$$| \overrightarrow{DE} | = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$| \overrightarrow{EF} | = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37},$$

$$| \overrightarrow{FD} | = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$