

Zasada szufladkowa
Dirichleta III.
Zadania bardzo trudne.

dr inż. Michał Zwierzyński



Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zadanie z zerami i jedynką.*
- *Zadanie z jedynkami.*
- *Osoby na spotkaniu*
- *Jednokolorowy trójkąt*
- *Osoby na spotkaniu cd.*
- *Zadanie z IMO*





Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zadanie z zerami i jedynką.*
- *Zadanie z jedynkami.*
- *Osoby na spotkaniu*
- *Jednokolorowy trójkąt*
- *Osoby na spotkaniu cd.*
- *Zadanie z IMO*



Podstawowe sformułowanie

- **Zasada szufladkowa Dirichleta.**
- Jeżeli mamy n szufladek oraz co najmniej $n + 1$ przedmiotów i umieszczamy wszystkie przedmioty w szufladkach, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się co najmniej jeden przedmiot.





Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zadanie z zerami i jedynką.*
- *Zadanie z jedynkami.*
- *Osoby na spotkaniu*
- *Jednokolorowy trójkąt*
- *Osoby na spotkaniu cd.*
- *Zadanie z IMO*



Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Uwaga:
 - Symbol $\lceil x \rceil$ (czyt. „sufit z liczby x ”) – jest to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż x , np. $\lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 8 \rceil = 8$.

Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Uwaga:
 - Symbol $\lceil x \rceil$ (czyt. „sufit z liczby x ”) – jest to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż x , np. $\lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 8 \rceil = 8$.

Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Uwaga:
 - Symbol $\lceil x \rceil$ (czyt. „sufit z liczby x ”) – jest to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż x , np. $\lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 8 \rceil = 8$.

Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Uwaga:
 - Symbol $\lceil x \rceil$ (czyt. „sufit z liczby x ”) – jest to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż x , np. $\lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 8 \rceil = 8$.

Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Uwaga:
 - Symbol $\lceil x \rceil$ (czyt. „sufit z liczby x ”) – jest to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż x , np. $\lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 8 \rceil = 8$.

Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Przykład:
 - Mając 13 kulek, które wkładamy do np. 5 pudełek, to jesteśmy pewni, że w jednym znajdą się co najmniej $\left\lceil \frac{13}{5} \right\rceil = 3$ kulki.

Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Przykład:
 - Mając 13 kulek, które wkładamy do np. 5 pudełek, to jesteśmy pewni, że w jednym znajdą się co najmniej $\left\lceil \frac{13}{5} \right\rceil = 3$ kulki.

Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Przykład:
 - Mając 13 kulek, które wkładamy do np. 5 pudełek, to jesteśmy pewni, że w jednym znajdą się co najmniej $\left\lceil \frac{13}{5} \right\rceil = 3$ kulki.



Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zadanie z zerami i jedynką.*
- *Zadanie z jedynkami.*
- *Osoby na spotkaniu*
- *Jednokolorowy trójkąt*
- *Osoby na spotkaniu cd.*
- *Zadanie z IMO*



Zadanie z zerami i jedynką.

- Niech liczba naturalna $a > 1$ nie dzieli się przez 2 ani przez 5. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka potęga liczby a , która kończy się na $\underbrace{000 \dots 01}_n$.

Zadanie z zerami i jedynką.

- Rozważmy ciąg 10^n kolejnych potęg liczby a , mianowicie: a ,
$$a, a^2, a^3, \dots, a^{10^n}.$$
- Wyznaczamy ich reszty z dzielenia przez 10^n . Resztą nie może być 0, ponieważ liczba a jest względnie pierwsza z 2,5. Stąd może być tylko $10^n - 1$ możliwych reszt z dzielenia:
$$1, 2, 3, \dots, 10^n - 1.$$

Zadanie z zerami i jedynką.

- Rozważmy ciąg 10^n kolejnych potęg liczby a , mianowicie: a ,
 $a, a^2, a^3, \dots, a^{10^n}.$
- Wyznaczamy ich reszty z dzielenia przez 10^n . Resztą nie może być 0, ponieważ liczba a jest względnie pierwsza z 2,5. Stąd może być tylko $10^n - 1$ możliwych reszt z dzielenia:
 $1, 2, 3, \dots, 10^n - 1.$

Zadanie z zerami i jedynką.

- Rozważmy ciąg 10^n kolejnych potęg liczby a , mianowicie: a ,
 $a, a^2, a^3, \dots, a^{10^n}.$
- Wyznaczamy ich reszty z dzielenia przez 10^n . Resztą nie może być 0, ponieważ liczba a jest względnie pierwsza z 2,5. Stąd może być tylko $10^n - 1$ możliwych reszt z dzielenia:
 $1, 2, 3, \dots, 10^n - 1.$

Zadanie z zerami i jedynką.

- Rozważmy ciąg 10^n kolejnych potęg liczby a , mianowicie: a ,
$$a, a^2, a^3, \dots, a^{10^n}.$$
- Wyznaczamy ich reszty z dzielenia przez 10^n . Resztą nie może być 0, ponieważ liczba a jest względnie pierwsza z 2,5. Stąd może być tylko $10^n - 1$ możliwych reszt z dzielenia:
$$1, 2, 3, \dots, 10^n - 1.$$

Zadanie z zerami i jedynką.

- Rozważmy ciąg 10^n kolejnych potęg liczby a , mianowicie: a ,
$$a, a^2, a^3, \dots, a^{10^n}.$$
- Wyznaczamy ich reszty z dzielenia przez 10^n . Resztą nie może być 0, ponieważ liczba a jest względnie pierwsza z 2,5. Stąd może być tylko $10^n - 1$ możliwych reszt z dzielenia:
$$1, 2, 3, \dots, 10^n - 1.$$

Zadanie z zerami i jedynką.

- Z zasady szufladkowej Dirichleta dwie z potęg, dajmy na to a^k oraz a^t (dla $t < k$) dają taką samą resztę z dzielenia przez 10^n . Czyli:

$$10^n | a^k - a^t \iff 10^n | a^t(a^{k-t} - 1)$$

- Ponieważ a^t jest względnie pierwsze z 10^n , to musi zachodzić $10^n | (a^{k-t} - 1)$, czyli a^{k-t} kończy się $\underbrace{000 \dots 01}_n$.

Zadanie z zerami i jedynką.

- Z zasady szufladkowej Dirichleta dwie z potęg, dajmy na to a^k oraz a^t (dla $t < k$) dają taką samą resztę z dzielenia przez 10^n . Czyli:

$$10^n | a^k - a^t \iff 10^n | a^t (a^{k-t} - 1)$$

- Ponieważ a^t jest względnie pierwsze z 10^n , to musi zachodzić $10^n | (a^{k-t} - 1)$, czyli a^{k-t} kończy się $\underbrace{000 \dots 01}_n$.

Zadanie z zerami i jedynką.

- Z zasady szufladkowej Dirichleta dwie z potęg, dajmy na to a^k oraz a^t (dla $t < k$) dają taką samą resztę z dzielenia przez 10^n . Czyli:

$$10^n | a^k - a^t \iff 10^n | a^t (a^{k-t} - 1)$$

- Ponieważ a^t jest względnie pierwsze z 10^n , to musi zachodzić $10^n | (a^{k-t} - 1)$,
czyli a^{k-t} kończy się $\underbrace{000 \dots 01}_n$.

Zadanie z zerami i jedynką.

- Z zasady szufladkowej Dirichleta dwie z potęg, dajmy na to a^k oraz a^t (dla $t < k$) dają taką samą resztę z dzielenia przez 10^n . Czyli:

$$10^n | a^k - a^t \iff 10^n | a^t (a^{k-t} - 1)$$

- Ponieważ a^t jest względnie pierwsze z 10^n , to musi zachodzić $10^n | (a^{k-t} - 1)$, czyli a^{k-t} kończy się $\underbrace{000 \dots 01}_n$.



Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zadanie z zerami i jedynką.*
- *Zadanie z jedynkami.*
- *Osoby na spotkaniu*
- *Jednokolorowy trójkąt*
- *Osoby na spotkaniu cd.*
- *Zadanie z IMO*



Zadanie z jedynkami.

- Niech n będzie liczbą naturalną, która nie dzieli się przez 2 ani przez 5. Udowodnij, że istnieje taka wielokrotność liczby n , która składa się wyłącznie z jedynek.
- Dla np. trójki wielokrotnością jest $111 = 3 \cdot 37$, a dla siódemki $111111 = 7 \cdot 15873$.

Zadanie z jedynkami.

- Niech n będzie liczbą naturalną, która nie dzieli się przez 2 ani przez 5. Udowodnij, że istnieje taka wielokrotność liczby n , która składa się wyłącznie z jedynek.
- Dla np. trójki wielokrotnością jest $111 = 3 \cdot 37$, a dla siódemki $111111 = 7 \cdot 15873$.

Zadanie z jedynkami.

- Niech n będzie liczbą naturalną, która nie dzieli się przez 2 ani przez 5. Udowodnij, że istnieje taka wielokrotność liczby n , która składa się wyłącznie z jedynek.
- Dla np. trójki wielokrotnością jest $111 = 3 \cdot 37$, a dla siódemki $111111 = 7 \cdot 15873$.

Zadanie z jedynkami.

- Rozwiązanie:
- Rozważmy n liczb
 $1, 11, \dots, 11 \dots 11$
- oraz ich reszty z dzielenia przez n . Jeżeli wśród tych reszt znajdzie się 0 , to znaleźliśmy szukaną liczbę. Gdy nie, to możliwe reszty to: $1, 2, \dots, n - 1$. Jest ich mniej niż liczb, więc z zasady szufladkowej znajdą się dwie takie, które dają taką samą resztę z dzielenia przez n .

Zadanie z jedynkami.

- Rozwiązanie:
- Rozważmy n liczb
 $1, 11, \dots, 11 \dots 11$
- oraz ich reszty z dzielenia przez n . Jeżeli wśród tych reszt znajdzie się 0 , to znaleźliśmy szukaną liczbę. Gdy nie, to możliwe reszty to: $1, 2, \dots, n - 1$. Jest ich mniej niż liczb, więc z zasady szufladkowej znajdą się dwie takie, które dają taką samą resztę z dzielenia przez n .

Zadanie z jedynkami.

- Rozwiązanie:
- Rozważmy n liczb
$$1, 11, \dots, 11 \dots 11$$
- oraz ich reszty z dzielenia przez n . Jeżeli wśród tych reszt znajdzie się 0 , to znaleźliśmy szukaną liczbę. Gdy nie, to możliwe reszty to: $1, 2, \dots, n - 1$. Jest ich mniej niż liczb, więc z zasady szufladkowej znajdą się dwie takie, które dają taką samą resztę z dzielenia przez n .

Zadanie z jedynkami.

- Rozwiązanie:
- Rozważmy n liczb
$$1, 11, \dots, 11 \dots 11$$
- oraz ich reszty z dzielenia przez n . Jeżeli wśród tych reszt znajdzie się 0 , to znaleźliśmy szukaną liczbę. Gdy nie, to możliwe reszty to: $1, 2, \dots, n - 1$. Jest ich mniej niż liczb, więc z zasady szufladkowej znajdą się dwie takie, które dają taką samą resztę z dzielenia przez n .

Zadanie z jedynkami.

- Stąd ich różnica

$$1111 \dots 111000 \dots 000$$

- dzieli się przez liczbę n .
- Skoro n nie dzieli się ani przez 2 ani przez 5, to możemy pozbyć się końcowych zer i wtedy liczba $1111 \dots 111$ będzie dzieliła się przez n . Koniec.

Zadanie z jedynkami.

- Stąd ich różnica

$1111 \dots 111000 \dots 000$

- dzieli się przez liczbę n .
- Skoro n nie dzieli się ani przez 2 ani przez 5, to możemy pozbyć się końcowych zer i wtedy liczba $1111 \dots 111$ będzie dzieliła się przez n . Koniec.

Zadanie z jedynkami.

- Stąd ich różnica

$$1111 \dots 111000 \dots 000$$

- dzieli się przez liczbę n .
- Skoro n nie dzieli się ani przez 2 ani przez 5, to możemy pozbyć się końcowych zer i wtedy liczba $1111 \dots 111$ będzie dzieliła się przez n . Koniec.

Zadanie z jedynkami.

- Stąd ich różnica

$$1111 \dots 111000 \dots 000$$

- dzieli się przez liczbę n .
- Skoro n nie dzieli się ani przez 2 ani przez 5 , to możemy pozbyć się końcowych zer i wtedy liczba $1111 \dots 111$ będzie dzieliła się przez n . Koniec.



Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zadanie z zerami i jedynką.*
- *Zadanie z jedynkami.*
- ***Osoby na spotkaniu***
- *Jednokolorowy trójkąt*
- *Osoby na spotkaniu cd.*
- *Zadanie z IMO*



Osoby na spotkaniu

- Mając 6 osób, wśród nich znajdzie się na pewno trzy takie które się w ogóle ze sobą nie znają, albo trzy takie, które się ze sobą znają.

(Zakładamy oczywiście, że relacja znajomości jest symetryczna, tzn. gdy A zna B, to również B zna A)

Osoby na spotkaniu

- Mając 6 osób, wśród nich znajdzie się na pewno trzy takie które się w ogóle ze sobą nie znają, albo trzy takie, które się ze sobą znają.

(Zakładamy oczywiście, że relacja znajomości jest symetryczna, tzn. gdy A zna B , to również B zna A)

Osoby na spotkaniu

- Rozwiązanie: najpierw rozwiążemy inny problem 😊





Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zadanie z zerami i jedynką.*
- *Zadanie z jedynkami.*
- *Osoby na spotkaniu*
- ***Jednokolorowy trójkąt***
- *Osoby na spotkaniu cd.*
- *Zadanie z IMO*

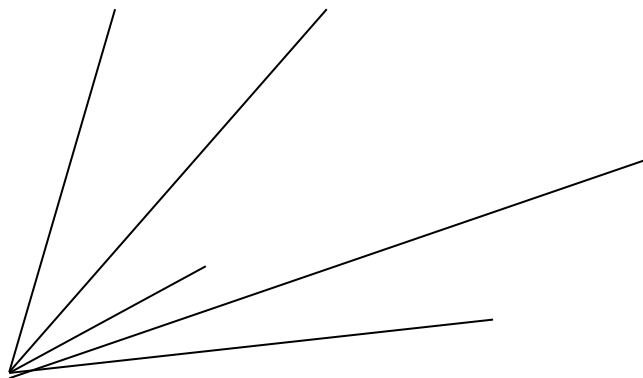


Jednokolorowy trójkąt

- Mamy 6 punktów na płaszczyźnie (żadne trzy nie są współliniowe). Zaznaczamy między każdymi dwoma albo czerwony albo niebieski odcinek. Udowodnij, że zawsze znajdzie się jednokolorowy trójkąt.

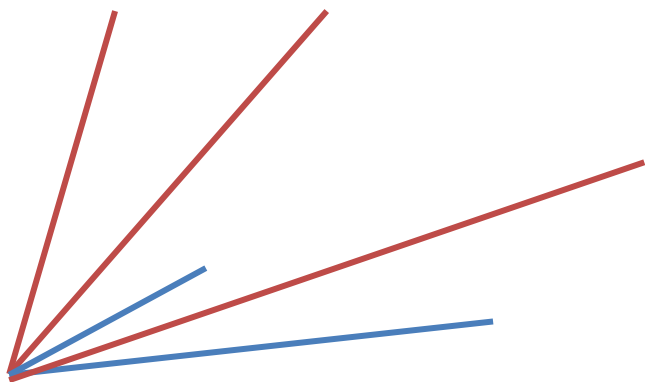
Jednokolorowy trójkąt

- Z jednego (obranego przez nas) punktu wychodzi 5 odcinków:



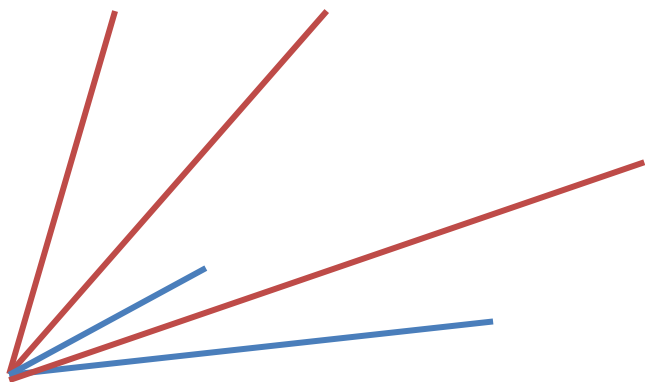
Jednokolorowy trójkąt

- Z jednego (obranego przez nas) punktu wychodzi 5 odcinków:
 - Z zasady szufladkowej Dirichleta, trzy z nich będą tego samego koloru (dajmy na to czerwonego).



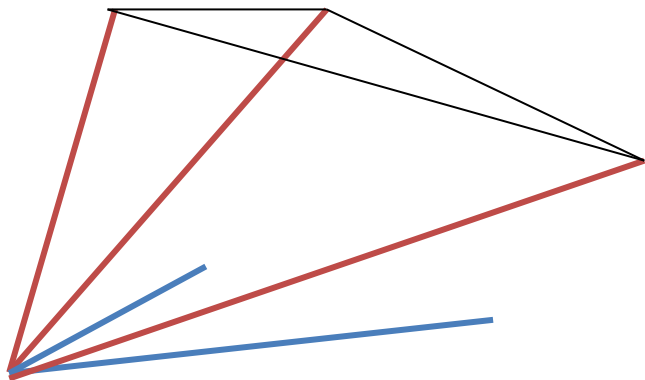
Jednokolorowy trójkąt

- Z jednego (obranego przez nas) punktu wychodzi 5 odcinków:
 - Z zasady szufladkowej Dirichleta, trzy z nich będą tego samego koloru (dajmy na to czerwonego).



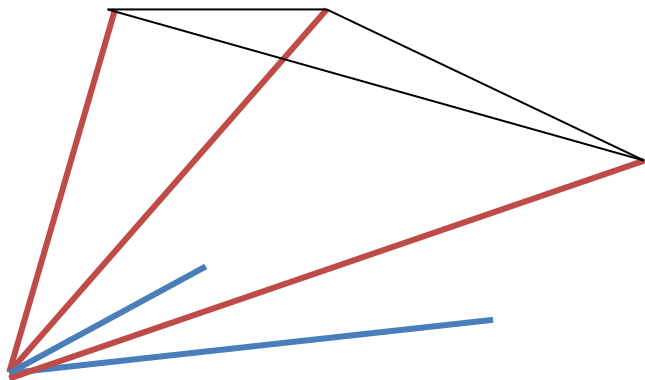
Jednokolorowy trójkąt

- Z jednego (obranego przez nas) punktu wychodzi 5 odcinków:
 - Rozważmy teraz odcinki łączące krańce czerwonych odcinków (czarne odcinki).
 - Gdyby któryś z nich był czerwony – KONIEC, mamy czerwony trójkąt, w przeciwnym wypadku mielibyśmy trójkąt niebieski ☺ KONIEC.



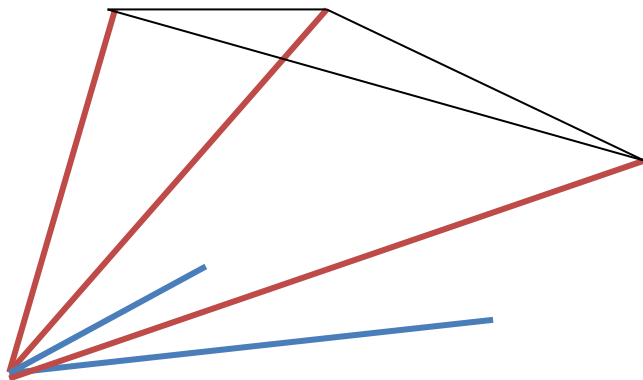
Jednokolorowy trójkąt

- Z jednego (obranego przez nas) punktu wychodzi 5 odcinków:
 - Rozważmy teraz odcinki łączące krańce czerwonych odcinków (czarne odcinki).
 - Gdyby któryś z nich był czerwony – KONIEC, mamy czerwony trójkąt, w przeciwnym wypadku mielibyśmy trójkąt niebieski ☺ KONIEC.



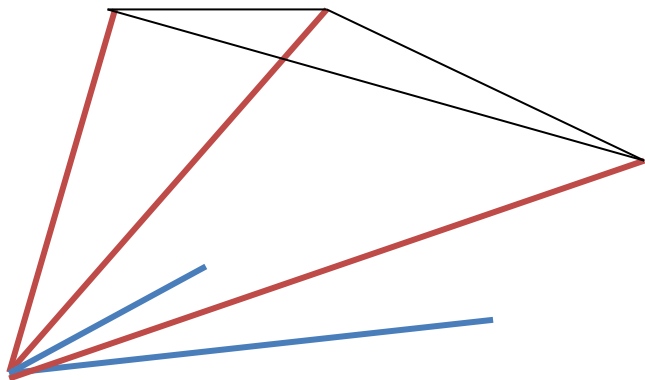
Jednokolorowy trójkąt

- Z jednego (obranego przez nas) punktu wychodzi 5 odcinków:
 - Rozważmy teraz odcinki łączące krańce czerwonych odcinków (czarne odcinki).
 - Gdyby któryś z nich był czerwony – KONIEC, mamy czerwony trójkąt, w przeciwnym wypadku mielibyśmy trójkąt niebieski ☺ KONIEC.



Jednokolorowy trójkąt

- Z jednego (obranego przez nas) punktu wychodzi 5 odcinków:
 - Rozważmy teraz odcinki łączące krańce czerwonych odcinków (czarne odcinki).
 - Gdyby któryś z nich był czerwony – KONIEC, mamy czerwony trójkąt, w przeciwnym wypadku mielibyśmy trójkąt niebieski ☺ KONIEC.





Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zadanie z zerami i jedynką.*
- *Zadanie z jedynkami.*
- *Osoby na spotkaniu*
- *Jednokolorowy trójkąt*
- *Osoby na spotkaniu cd.*
- *Zadanie z IMO*



Osoby na spotkaniu, cd.

- Rozwiązanie: zadanie jest już rozwiązane, jeżeli ludzi potraktujemy jako punkty na płaszczyźnie, oraz to, że jeżeli się znają, to połączylibyśmy ich kolorem czerwonym, a gdyby się nie znali, to kolorem niebieskim – wiemy, że na pewno istniałby jednokolorowy trójkąt, stąd albo trzy osoby w ogóle by się nie znały, albo przeciwnie ☺

Osoby na spotkaniu, cd.

- Rozwiązanie: zadanie jest już rozwiązane, jeżeli ludzi potraktujemy jako punkty na płaszczyźnie, oraz to, że jeżeli się znają, to połączylibyśmy ich kolorem czerwonym, a gdyby się nie znali, to kolorem niebieskim – wiemy, że na pewno istniałby jednokolorowy trójkąt, stąd albo trzy osoby w ogóle by się nie znały, albo przeciwnie ☺

Osoby na spotkaniu, cd.

- Rozwiązanie: zadanie jest już rozwiązane, jeżeli ludzi potraktujemy jako punkty na płaszczyźnie, oraz to, że jeżeli się znają, to połączylibyśmy ich kolorem czerwonym, a gdyby się nie znali, to kolorem niebieskim – wiemy, że na pewno istniałby jednokolorowy trójkąt, stąd albo trzy osoby w ogóle by się nie znały, albo przeciwnie ☺



Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zadanie z zerami i jedynką.*
- *Zadanie z jedynkami.*
- *Osoby na spotkaniu*
- *Jednokolorowy trójkąt*
- *Osoby na spotkaniu cd.*
- *Zadanie z IMO*



Zadanie z IMO

- Mając sześć punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe, oraz których odległości między punktami są parami różne, udowodnij, że istnieje taki odcinek, który jest zarazem najdłuższym bokiem jednego trójkąta oraz najkrótszym bokiem innego trójkąta.

Zadanie z IMO

- Rozwiązanie:
 - Kolorujemy odcinki w następujący sposób:
 - czerwonym, gdy jest to odcinek, który jest najkrótszy w pewnym trójkącie
 - niebieskim, w przeciwnym przypadku.
 - Z poprzedniego zadania wiemy, że będzie na pewno jednokolorowy trójkąt – czy może być to niebieski trójkąt? NIE – bo wtedy jeden z odcinków musiałby być najkrótszy, czyli byłby pomalowany na czerwono.
 - Mamy więc trójkąt czerwony – szukany odcinkiem jest najdłuższy z boków tego trójkąta. Jest on zarazem najkrótszym odcinkiem w pewnym trójkącie (jako czerwony), oraz najdłuższym w naszym czerwonym trójkącie.

Zadanie z IMO

- Rozwiązanie:
 - Kolorujemy odcinki w następujący sposób:
 - czerwonym, gdy jest to odcinek, który jest najkrótszy w pewnym trójkącie
 - niebieskim, w przeciwnym przypadku.
 - Z poprzedniego zadania wiemy, że będzie na pewno jednokolorowy trójkąt – czy może być to niebieski trójkąt? NIE – bo wtedy jeden z odcinków musiałby być najkrótszy, czyli byłby pomalowany na czerwono.
 - Mamy więc trójkąt czerwony – szukany odcinkiem jest najdłuższy z boków tego trójkąta. Jest on zarazem najkrótszym odcinkiem w pewnym trójkącie (jako czerwony), oraz najdłuższym w naszym czerwonym trójkącie.

Zadanie z IMO

- Rozwiązanie:
 - Kolorujemy odcinki w następujący sposób:
 - czerwonym, gdy jest to odcinek, który jest najkrótszy w pewnym trójkącie
 - niebieskim, w przeciwnym przypadku.
 - Z poprzedniego zadania wiemy, że będzie na pewno jednokolorowy trójkąt – czy może być to niebieski trójkąt? NIE – bo wtedy jeden z odcinków musiałby być najkrótszy, czyli byłby pomalowany na czerwono.
 - Mamy więc trójkąt czerwony – szukany odcinkiem jest najdłuższy z boków tego trójkąta. Jest on zarazem najkrótszym odcinkiem w pewnym trójkącie (jako czerwony), oraz najdłuższym w naszym czerwonym trójkącie.

Zadanie z IMO

- Rozwiązanie:
 - Kolorujemy odcinki w następujący sposób:
 - czerwonym, gdy jest to odcinek, który jest najkrótszy w pewnym trójkącie
 - niebieskim, w przeciwnym przypadku.
 - Z poprzedniego zadania wiemy, że będzie na pewno jednokolorowy trójkąt – czy może być to niebieski trójkąt? NIE – bo wtedy jeden z odcinków musiałby być najkrótszy, czyli byłby pomalowany na czerwono.
 - Mamy więc trójkąt czerwony – szukany odcinkiem jest najdłuższy z boków tego trójkąta. Jest on zarazem najkrótszym odcinkiem w pewnym trójkącie (jako czerwony), oraz najdłuższym w naszym czerwonym trójkącie.

Zadanie z IMO

- Rozwiązanie:
 - Kolorujemy odcinki w następujący sposób:
 - czerwonym, gdy jest to odcinek, który jest najkrótszy w pewnym trójkącie
 - niebieskim, w przeciwnym przypadku.
 - Z poprzedniego zadania wiemy, że będzie na pewno jednokolorowy trójkąt – czy może być to niebieski trójkąt? NIE – bo wtedy jeden z odcinków musiałby być najkrótszy, czyli byłby pomalowany na czerwono.
 - Mamy więc trójkąt czerwony – szukany odcinkiem jest najdłuższy z boków tego trójkąta. Jest on zarazem najkrótszym odcinkiem w pewnym trójkącie (jako czerwony), oraz najdłuższym w naszym czerwonym trójkącie.

Zadanie z IMO

- Rozwiązanie:
 - Kolorujemy odcinki w następujący sposób:
 - czerwonym, gdy jest to odcinek, który jest najkrótszy w pewnym trójkącie
 - niebieskim, w przeciwnym przypadku.
 - Z poprzedniego zadania wiemy, że będzie na pewno jednokolorowy trójkąt – czy może być to niebieski trójkąt? NIE – bo wtedy jeden z odcinków musiałby być najkrótszy, czyli byłby pomalowany na czerwono.
 - Mamy więc trójkąt czerwony – szukany odcinkiem jest najdłuższy z boków tego trójkąta. Jest on zarazem najkrótszym odcinkiem w pewnym trójkącie (jako czerwony), oraz najdłuższym w naszym czerwonym trójkącie.

Zadanie z IMO

- Rozwiązanie:
 - Kolorujemy odcinki w następujący sposób:
 - czerwonym, gdy jest to odcinek, który jest najkrótszy w pewnym trójkącie
 - niebieskim, w przeciwnym przypadku.
 - Z poprzedniego zadania wiemy, że będzie na pewno jednokolorowy trójkąt – czy może być to niebieski trójkąt? NIE – bo wtedy jeden z odcinków musiałby być najkrótszy, czyli byłby pomalowany na czerwono.
 - Mamy więc trójkąt czerwony – szukany odcinkiem jest najdłuższy z boków tego trójkąta. Jest on zarazem najkrótszym odcinkiem w pewnym trójkącie (jako czerwony), oraz najdłuższym w naszym czerwonym trójkącie.

Zasada szufladkowa
Dirichleta III.
Zadania bardzo trudne.

dr inż. Michał Zwierzyński