

Zasada szufladkowa
Dirichleta II.
Zadania trudniejsze.

dr inż. Michał Zwierzyński

Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Punkty w prostokącie.*
- *Szachy.*
- *Intensywny trening.*
- *Suma liczb.*
- *Taka sama suma (IMO 1972)*



Plan prezentacji

- ***Podstawowe sformułowanie.***
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Punkty w prostokącie.*
- *Szachy.*
- *Intensywny trening.*
- *Suma liczb.*
- *Taka sama suma (IMO 1972)*



Podstawowe sformułowanie

- **Zasada szufladkowa Dirichleta.**
- Jeżeli mamy n szufladek oraz co najmniej $n + 1$ przedmiotów i umieszczamy wszystkie przedmioty w szufladkach, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się co najmniej jeden przedmiot.



Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- ***Ogólne sformułowanie.***
- *Punkty w prostokącie.*
- *Szachy.*
- *Intensywny trening.*
- *Suma liczb.*
- *Taka sama suma (IMO 1972)*



Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Uwaga:
 - Symbol $\lceil x \rceil$ (czyt. „sufit z liczby x ”) – jest to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż x , np. $\lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 8 \rceil = 8$.

Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Przykład:
 - Mając 13 kulek, które wkładamy do np. 5 pudełek, to jesteśmy pewni, że w jednym znajdą się co najmniej $\left\lceil \frac{13}{5} \right\rceil = 3$ kulki.

Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- ***Punkty w prostokącie.***
- *Szachy.*
- *Intensywny trening.*
- *Suma liczb.*
- *Taka sama suma (IMO 1972)*

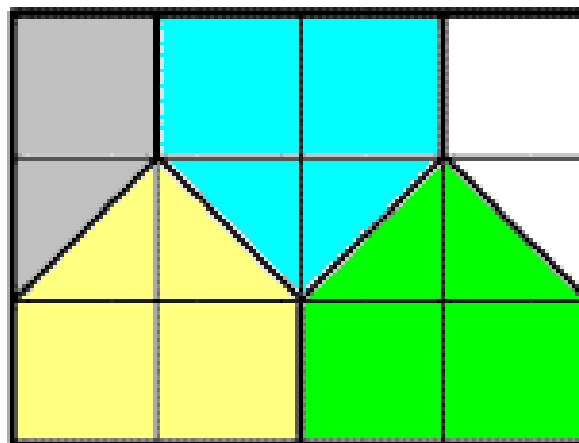


Punkty w prostokącie

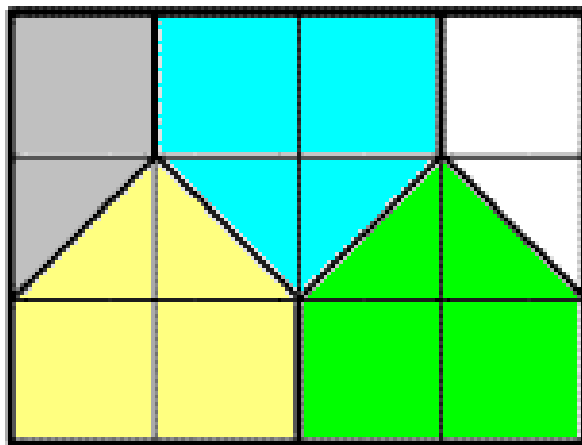
- Udowodnić, że dwa spośród sześciu punktów w prostokącie 3×4 są odległe od siebie co najwyżej o $\sqrt{5}$.

Punkty w prostokącie

- Udowodnić, że dwa spośród sześciu punktów w prostokącie 3×4 są odległe od siebie co najwyżej o $\sqrt{5}$.
- Rozwiązanie:
 - Dzielimy prostokąt na pięć obszarów, tak jak na rysunku:

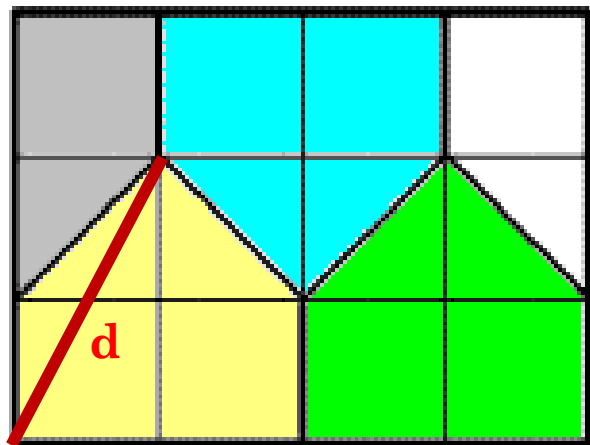


Punkty w prostokącie



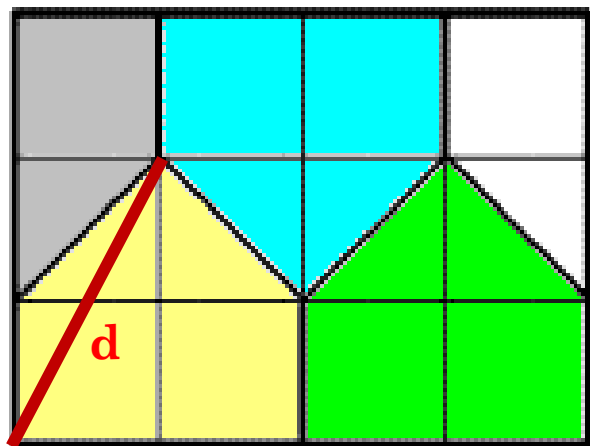
- Mając 6 punktów oraz 5 obszarów, na pewno w jednym obszarze znajdą się dwa punkty.

Punkty w prostokącie



- Łatwo zauważyć, że największa odległość w pojedynczym obszarze wynosi dokładnie $\sqrt{5}$.

Punkty w prostokącie



- Łatwo zauważyć, że największa odległość w pojedynczym obszarze wynosi dokładnie $\sqrt{5}$.
- (Czerwony odcinek – z tw. Pitagorasa otrzymujemy: $1^2 + 2^2 = d^2$, stąd $d = \sqrt{5}$)

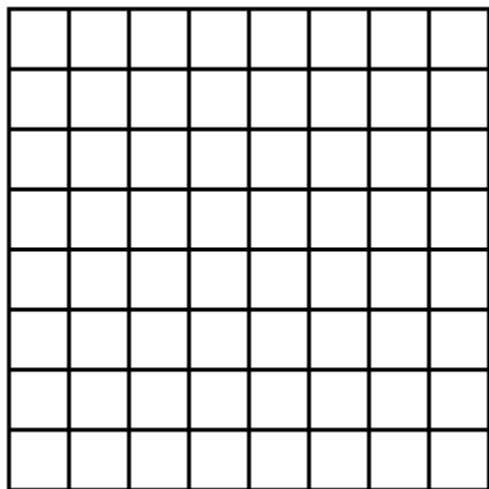
Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Punkty w prostokącie.*
- ***Szachy.***
- *Intensywny trening.*
- *Suma liczb.*
- *Taka sama suma (IMO 1972)*



Szachy

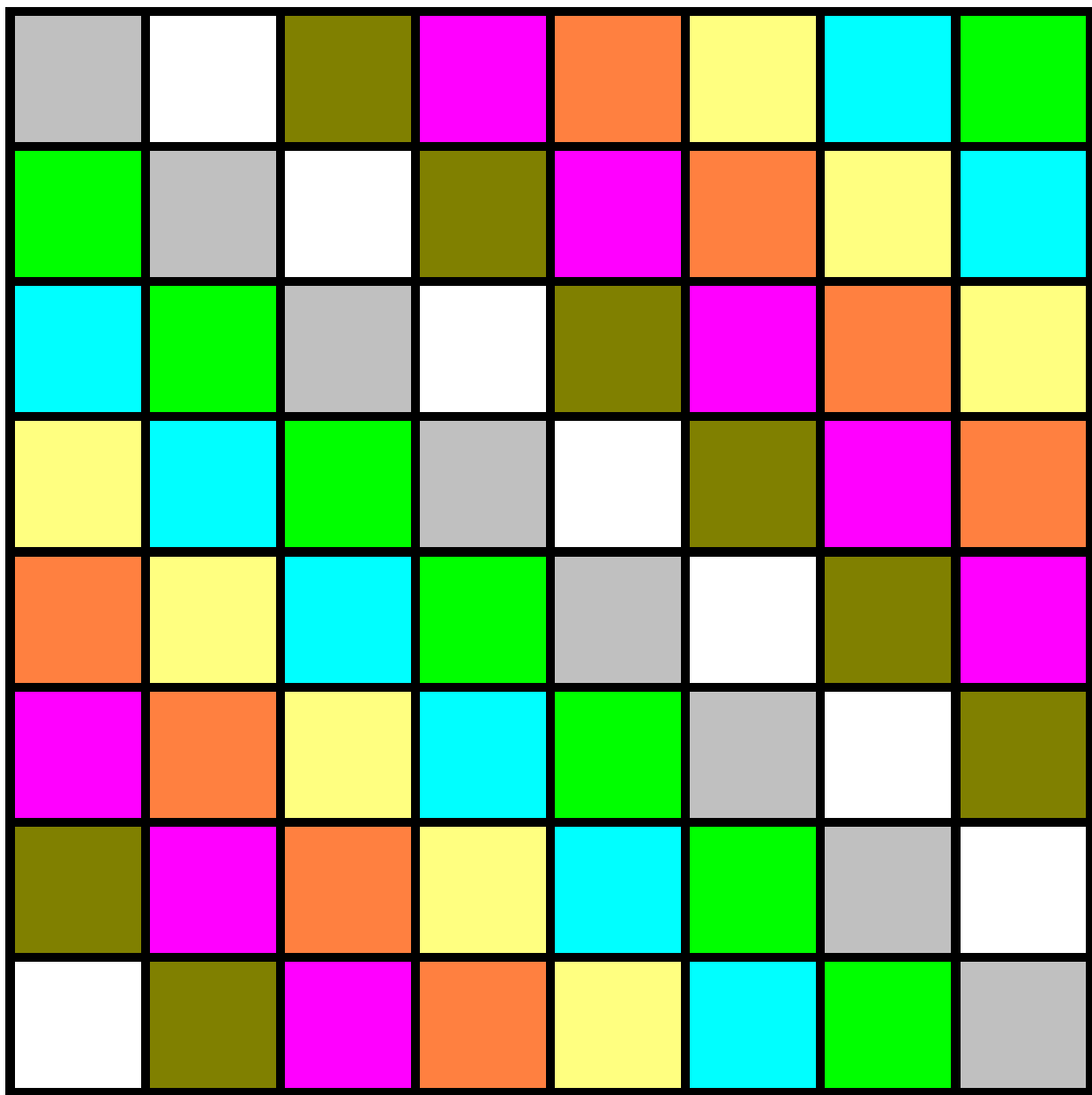
- 33 wieże ustawione są na planszy 8×8 do gry w szachy. Udowodnić, że można wybrać z nich 5, które nie atakują się nawzajem.



Szachy

- Dzielimy szachownicę na 8 „diagonalnych części”, tak jak na rysunku:





Szachy

- Dzielimy szachownicę na 8 „diagonalnych części”, tak jak na rysunku:



- Mamy więc 8 pudełek, do których wkładamy 33 wieże, stąd w jednym pudełku będą na pewno $\left\lceil \frac{33}{8} \right\rceil = 5$ wieże. Wieże w jednej grupie nie mogą się zbijać. Koniec.

Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Punkty w prostokącie.*
- *Szachy.*
- ***Intensywny trening.***
- *Suma liczb.*
- *Taka sama suma (IMO 1972)*



Intensywny trening

- Michał chce się przygotować do zawodów. Chce ćwiczyć przez 77 dni, w tym w każdym dniu chce co najmniej raz odbyć trening. Nie chce jednak odbyć więcej niż 132 treningi w ciągu 77 dni. Udowodnij, że istnieje ciąg kilku dni po sobie, w których Michał odbył dokładnie 21 treningów.

Intensywny trening

- Niech a_i oznacza liczbę treningów odbytych przez Michała do dnia i -tego włącznie. Mamy wtedy ciąg nierówności:

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{77} \leq 132$$

Intensywny trening

- Niech a_i oznacza liczbę treningów odbytych przez Michała do dnia i -tego włącznie. Mamy wtedy ciąg nierówności:

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{77} \leq 132$$

- Dodając stronami liczbę 21 , otrzymujemy:

$$22 \leq a_1 + 21 < \dots < a_{77} + 21 \leq 153$$

Intensywny trening

$$22 \leq a_1 + 21 < \dots < a_{77} + 21 \leq 153$$

- Spośród 154 liczb:

$$a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, \dots, a_{77} + 21$$

znajdują się co najmniej dwie takie same

Intensywny trening

$$22 \leq a_1 + 21 < \dots < a_{77} + 21 \leq 153$$

- Spośród 154 liczb:

$$a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, \dots, a_{77} + 21$$

znajdują się co najmniej dwie takie same
(zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta
– mamy 153 szufladki oraz 154
przedmioty)

Intensywny trening

$$22 \leq a_1 + 21 < \dots < a_{77} + 21 \leq 153$$

- Spośród 154 liczb:

$$a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, \dots, a_{77} + 21$$

znajdują się co najmniej dwie takie same.

Stąd istnieją takie indeksy i, j , że zachodzi:

$$a_i = a_j + 21$$

Intensywny trening

$$22 \leq a_1 + 21 < \dots < a_{77} + 21 \leq 153$$

- Spośród 154 liczb:

$$a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, \dots, a_{77} + 21$$

znajdują się co najmniej dwie takie same.

Stąd istnieją takie indeksy i, j , że zachodzi:

$$a_i = a_j + 21$$

Stąd wynika, że Michał odbył dokładnie 21 treningów w dniach: $j + 1, j + 2, \dots, i$.

Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Punkty w prostokącie.*
- *Szachy.*
- *Intensywny trening.*
- ***Suma liczb.***
- *Taka sama suma (IMO 1972)*



Suma liczb

- Mamy n liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots, a_n$.
Udowodnić, że zawsze istnieje taki podzbiór danych liczb, których suma dzieli się przez n .

Suma liczb

- Mamy n liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots, a_n$.
Udowodnić, że zawsze istnieje taki podzbiór danych liczb, których suma dzieli się przez n .
- Rozwiązanie:
- Utwórzmy n sum:
$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Suma liczb

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

- Gdy któraś z tych sum, dzieli się przez n , to koniec zadania. Gdy nie, to mamy n sum, które mogą dawać następujące reszty z dzielenia przez n :
 - $1, 2, 3, 4, \dots, n - 1$

Suma liczb

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

- Gdy któraś z tych sum, dzieli się przez n , to koniec zadania. Gdy nie, to mamy n sum, które mogą dawać następujące reszty z dzielenia przez n :
 - $1, 2, 3, 4, \dots, n - 1$
- Stąd, zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta znajdują się dwie sumy s_i, s_j , dające tę samą resztę z dzielenia przez n .

Suma liczb

- Zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta znajdują się dwie sumy s_i, s_j , dające tę samą resztę z dzielenia przez n .
- (Bez straty ogólności założmy, że $j > i$)

Suma liczb

- Zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta znajdują się dwie sumy s_i, s_j , dające tę samą resztę z dzielenia przez n .
- (Bez straty ogólności założmy, że $j > i$)
- Wtedy oczywiście ich różnica $s_j - s_i$ dzieli się przez n .

Suma liczb

- Zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta znajdują się dwie sumy s_i, s_j , dające tę samą resztę z dzielenia przez n .
- (Bez straty ogólności założmy, że $j > i$)
- Wtedy oczywiście ich różnica $s_j - s_i$ dzieli się przez n .
- Ponieważ:

$$s_j - s_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$$

Suma liczb

- Zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta znajdują się dwie sumy s_i, s_j , dające tę samą resztę z dzielenia przez n .
- (Bez straty ogólności założmy, że $j > i$)
- Wtedy oczywiście ich różnica $s_j - s_i$ dzieli się przez n .
- Ponieważ:

$$s_j - s_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$$

- To udało nam się znaleźć szukaną sumę, która dzieli się przez n .

Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Punkty w prostokącie.*
- *Szachy.*
- *Intensywny trening.*
- *Suma liczb.*
- ***Taka sama suma (IMO 1972)***



Taka sama suma (IMO 1972)

- Spośród 10 różnych, dwucyfrowych liczb zawsze można wybrać dwa rozłączne podzbiory, których sumy elementów są takie same.

Taka sama suma (IMO 1972)

- Spośród 10 różnych, dwucyfrowych liczb zawsze można wybrać dwa rozłączne podzbiory, których sumy elementów są takie same.
- Np. mając liczby: 15,16,20,24,25,30,33, 37,39,99 można wybrać podzbiory: $\{15,16,30\}$ oraz $\{24,37\}$. Suma ich elementów wynosi 61.

Taka sama suma (IMO 1972)

- Zbiór 10 – elementowy ma dokładnie $2^{10} - 1 = 1023$ niepustych podzbiorów.

Taka sama suma (IMO 1972)

- Zbiór 10 – elementowy ma dokładnie $2^{10} - 1 = 1023$ niepustych podzbiorów.
- Suma liczb w każdym z podzbiorów na pewno jest $\leq 10 \cdot 99 = 990$, stąd z zasady szufladkowej istnieją dwa różne podzbiory S_1, S_2 (niekoniecznie rozłączne) o takiej samej sumie.

Taka sama suma (IMO 1972)

- Zbiór 10 – elementowy ma dokładnie $2^{10} - 1 = 1023$ niepustych podzbiorów.
- Suma liczb w każdym z podzbiorów na pewno jest $\leq 10 \cdot 99 = 990$, stąd z zasady szufladkowej istnieją dwa różne podzbiory S_1, S_2 (niekoniecznie rozłączne) o takiej samej sumie.
- Gdy $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, to koniec, w przeciwnym wypadku wystarczy z obydwu podzbiorów usunąć te elementy, które się powtarzają (sumy elementów nadal będą takie same).

Zasada szufladkowa
Dirichleta II.
Zadania trudniejsze.

dr inż. Michał Zwierzyński