

Zasada szufladkowa Dirichleta. Podstawy.

dr inż. Michał Zwierzyński

Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Dlaczego tak późno?*
- *Czy to jest w ogóle przydatne?*
- *Zad.1 – kobiety i mężczyźni.*
- *Zad.2 – włosy na głowie.*
- *Zaawansowane sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.*
- *Zad.3 – znajomi.*
- *Zadania do samodzielnego wykonania.*



Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Dlaczego tak późno?*
- *Czy to jest w ogóle przydatne?*
- *Zad.1 – kobiety i mężczyźni.*
- *Zad.2 – włosy na głowie.*
- *Zaawansowane sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.*
- *Zad.3 – znajomi.*
- *Zadania do samodzielnego wykonania.*



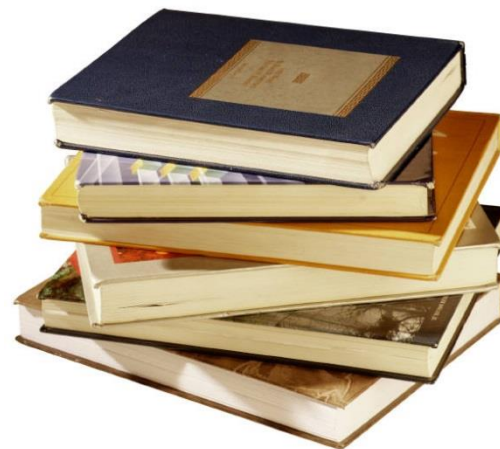
Podstawowe sformułowanie

- **Zasada szufladkowa Dirichleta.**
- Jeżeli mamy n szufladek oraz co najmniej $n + 1$ przedmiotów i umieszczamy wszystkie przedmioty w szufladkach, to w co najmniej jednej szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty.



Podstawowe sformułowanie

- Na przykład, mając trzy szuflady w biurku oraz 4 książki, które chcemy umieścić w szufladzie to na pewno w jednej szufladzie znajdą się co najmniej dwie książki.



Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Dlaczego tak późno?*
- *Czy to jest w ogóle przydatne?*
- *Zad.1 – kobiety i mężczyźni.*
- *Zad.2 – włosy na głowie.*
- *Zaawansowane sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.*
- *Zad.3 – znajomi.*
- *Zadania do samodzielnego wykonania.*



Dlaczego tak późno?



- Jest to bardzo prosta zasada matematyczna, jednak została pierwszy raz użyta dopiero w XIX wieku przez niemieckiego matematyka Dirichleta.
- Wcześniej ta zasada była znana w matematyce, jednak nie była nigdzie i do niczego używana.



Dlaczego tak późno?



- Peter Gustav Lejeune Dirichlet
 - Urodzony 13 lutego 1805 roku, zmarł 5 maja 1859 roku.
 - niemiecki matematyk francuskiego pochodzenia
 - teoria liczb, szeregów liczbowych, analiza matematyczna, ...
 - jako pierwszy zastosował zasadę szufladkową w pracy naukowej.



wikipedia.com

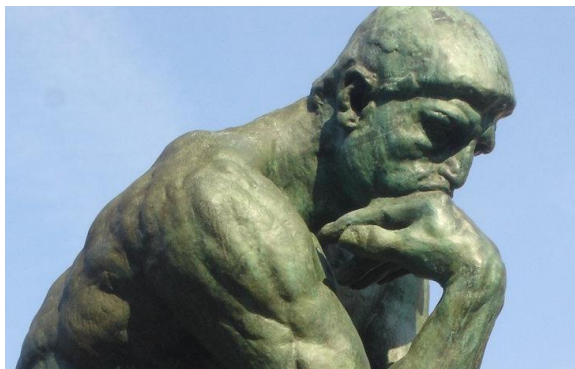
Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Dlaczego tak późno?*
- *Czy to jest w ogóle przydatne?*
- *Zad.1 – kobiety i mężczyźni.*
- *Zad.2 – włosy na głowie.*
- *Zaawansowane sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.*
- *Zad.3 – znajomi.*
- *Zadania do samodzielnego wykonania.*



Czy to jest w ogóle przydatne?

- Okazuje się, że ta prosta z pozoru zasada pozwala udowodnić wiele interesujących w matematyce (i nie tylko) twierdzeń oraz własności, do których niekiedy ciężko dojść w inny sposób. Problemy rozwiązywane zasadą szufladkową są z natury egzystencjonalne, tzn. pokazujemy w nich, że pewne obiekty, bądź sytuacje muszą zajść, niekoniecznie wskazując dokładne miejsce oraz czas, kiedy muszą zajść.



Czy to jest w ogóle przydatne?

- Najtrudniejszą rzeczą w zastosowaniu zasady szufladkowej Dirichleta jest poprawne zdefiniowanie szufladek oraz przedmiotów, które będziemy w nich umieszczali. Nauczymy się, patrząc na kilka przykładowych zadań, czym mogą być przedmioty oraz szufladki.



Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Dlaczego tak późno?*
- *Czy to jest w ogóle przydatne?*
- *Zad.1 – kobiety i mężczyźni.*
- *Zad.2 – włosy na głowie.*
- *Zaawansowane sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.*
- *Zad.3 – znajomi.*
- *Zadania do samodzielnego wykonania.*



Zad.1 – kobiety i mężczyźni.

- Udowodnij, że wśród trzech osób są co najmniej dwie tej samej płci.

Zad.1 – kobiety i mężczyźni.

- Udowodnij, że wśród trzech osób są co najmniej dwie tej samej płci.
- Rozwiązanie:

Zad.1 – kobiety i mężczyźni.

- Udowodnij, że wśród trzech osób są co najmniej dwie tej samej płci.
- Rozwiązanie:
 - przedmiotami będą ludzie, mamy trzy przedmioty

Zad.1 – kobiety i mężczyźni.

- Udowodnij, że wśród trzech osób są co najmniej dwie tej samej płci.
- Rozwiązanie:
 - przedmiotami będą ludzie, mamy trzy przedmioty
 - szufladkami będą płcie – do jednego pudełka wkładali mężczyzn, a do drugiego kobiety. Mamy dwa pudełka.

Zad.1 – kobiety i mężczyźni.

- Udowodnij, że wśród trzech osób są co najmniej dwie tej samej płci.
- Rozwiązanie:
 - przedmiotami będą ludzie, mamy trzy przedmioty
 - szufladkami będą płcie – do jednego pudełka wkładali mężczyzn, a do drugiego kobiety. Mamy dwa pudełka.
 - Reasumując: mamy dwa pudełka oraz trzy przedmioty, więc na pewno w jednej szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty.

Zad.1 – kobiety i mężczyźni.

- Udowodnij, że wśród trzech osób są co najmniej dwie tej samej płci.
- Rozwiązanie:
 - przedmiotami będą ludzie, mamy trzy przedmioty
 - szufladkami będą płcie – do jednego pudełka wkładali mężczyzn, a do drugiego kobiety. Mamy dwa pudełka.
 - Reasumując: mamy dwa pudełka oraz trzy przedmioty, więc na pewno w jednej szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty.
- Koniec.

Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Dlaczego tak późno?*
- *Czy to jest w ogóle przydatne?*
- *Zad.1 – kobiety i mężczyźni.*
- ***Zad.2 – włosy na głowie.***
- *Zaawansowane sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.*
- *Zad.3 – znajomi.*
- *Zadania do samodzielnego wykonania.*



Zad.2 – włosy na głowie

- Udowodnij, że w Warszawie znajdują się co najmniej dwie osoby, które posiadają taką samą, dodatnią, ilość włosów na głowie.



Zad.2 – włosy na głowie

- Udowodnij, że w Warszawie znajdują się co najmniej dwie osoby, które posiadają taką samą, dodatnią, ilość włosów na głowie.
- Rozwiązanie:



Zad.2 – włosy na głowie

- Udowodnij, że w Warszawie znajdują się co najmniej dwie osoby, które posiadają taką samą, dodatnią, ilość włosów na głowie.
- Rozwiązanie:
 - w Warszawie mieszka około 1 700 000 mieszkańców, niech oni będą przedmiotami.



Zad.2 – włosy na głowie

- Udowodnij, że w Warszawie znajdują się co najmniej dwie osoby, które posiadają taką samą, dodatnią, ilość włosów na głowie.
- Rozwiązanie:
 - w Warszawie mieszka około 1 700 000 mieszkańców, niech oni będą przedmiotami.
 - włosów na głowie (wg Wikipedii) człowiek ma co najwyżej 150 tysięcy, niech to będą szufladki.



Zad.2 – włosy na głowie

- Udowodnij, że w Warszawie znajdują się co najmniej dwie osoby, które posiadają taką samą, dodatnią, ilość włosów na głowie.
- Rozwiązanie:
 - w Warszawie mieszka około 1 700 000 mieszkańców, niech oni będą przedmiotami.
 - włosów na głowie (wg Wikipedii) człowiek ma co najwyżej 150 tysięcy, niech to będą szufladki.
 - Mamy więc 150 tysięcy szufladek oraz ponad 1mln przedmiotów.



Zad.2 – włosy na głowie

- Udowodnij, że w Warszawie znajdują się co najmniej dwie osoby, które posiadają taką samą, dodatnią, ilość włosów na głowie.
- Rozwiązanie:
 - w Warszawie mieszka około 1 700 000 mieszkańców, niech oni będą przedmiotami.
 - włosów na głowie (wg Wikipedii) człowiek ma co najwyżej 150 tysięcy, niech to będą szufladki.
 - Mamy więc 150 tysięcy szufladek oraz ponad 1mln przedmiotów.
- KONIEC.



Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Dlaczego tak późno?*
- *Czy to jest w ogóle przydatne?*
- *Zad.1 – kobiety i mężczyźni.*
- *Zad.2 – włosy na głowie.*
- ***Zaawansowane sformułowanie.***
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.*
- *Zad.3 – znajomi.*
- *Zadania do samodzielnego wykonania.*



Zaawansowane sformułowanie

- Trochę inne (bardziej ogólne)
sformułowanie zasady szufladkowej
Dirichleta:
- Gdy mamy $nk + 1$ przedmiotów oraz n
szufladek, to w co najmniej jednej szufladce
znajdzie się co najmniej $k + 1$ przedmiotów.

Zaawansowane sformułowanie

- Trochę inne (bardziej ogólne) sformułowanie zasady szufladkowej Dirichleta:
- Gdy mamy $nk + 1$ przedmiotów oraz n szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się co najmniej $k + 1$ przedmiotów.
 - Np. gdy mamy $7 = 2 \cdot 3 + 1$ przedmiotów oraz 2 szufladki, to w istniejącej szufladce, w której jest co najmniej $4 = 3 + 1$ przedmiotów.

Zaawansowane sformułowanie

- Gdy mamy $nk + 1$ przedmiotów oraz n szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się co najmniej $k + 1$ przedmiotów.
 - Dowód:

Zaawansowane sformułowanie

- Gdy mamy $nk + 1$ przedmiotów oraz n szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się co najmniej $k + 1$ przedmiotów.
 - Dowód:
 - Załóżmy, że jednak nie znajdzie się taka szufladka, czyli w każdej szufladce będzie co najwyżej k przedmiotów, wtedy w sumie może być co najwyżej kn przedmiotów,

Zaawansowane sformułowanie

- Gdy mamy $nk + 1$ przedmiotów oraz n szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się co najmniej $k + 1$ przedmiotów.
 - Dowód:
 - Załóżmy, że jednak nie znajdzie się taka szufladka, czyli w każdej szufladce będzie co najwyżej k przedmiotów, wtedy w sumie może być co najwyżej kn przedmiotów, sprzeczność.

Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Dlaczego tak późno?*
- *Czy to jest w ogóle przydatne?*
- *Zad.1 – kobiety i mężczyźni.*
- *Zad.2 – włosy na głowie.*
- *Zaawansowane sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.*
- *Zad.3 – znajomi.*
- *Zadania do samodzielnego wykonania.*



Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Uwaga:
 - Symbol $\lceil x \rceil$ (czyt. „sufit z liczby x ”) – jest to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż x , np. $\lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 8 \rceil = 8$.

Ogólne sformułowanie

- Zasadę szufladkową można zapisać jeszcze na co najmniej jeden sposób:
 - Gdy mamy n przedmiotów oraz k szufladek, to w co najmniej jednej szufladce znajdzie się na pewno co najmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ przedmiotów.
- Przykład:
 - Mając 13 kulek, które wkładamy do np. 5 pudełek, to jesteśmy pewni, że w jednym znajdą się co najmniej $\left\lceil \frac{13}{5} \right\rceil = 3$ kulki.

Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Dlaczego tak późno?*
- *Czy to jest w ogóle przydatne?*
- *Zad.1 – kobiety i mężczyźni.*
- *Zad.2 – włosy na głowie.*
- *Zaawansowane sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- ***Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.***
- *Zad.3 – znajomi.*
- *Zadania do samodzielnego wykonania.*



Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.

- Wiemy, że w Warszawie jest około 1.700.000 mieszkańców oraz, że człowiek ma co najwyżej 150.000 włosów na głowie. Określić maksymalną liczbę ludzi w Warszawie, dla których jesteśmy pewni, że mają taką samą, dodatnią ilość włosów na głowie.



Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.

- Wiemy, że w Warszawie jest około 1.700.000 mieszkańców oraz, że człowiek ma co najwyżej 150.000 włosów na głowie. Określić maksymalną liczbę ludzi w Warszawie, dla których jesteśmy pewni, że mają taką samą, dodatnią ilość włosów na głowie.
- Rozwiązanie:



Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.

- Wiemy, że w Warszawie jest około 1.700.000 mieszkańców oraz, że człowiek ma co najwyżej 150.000 włosów na głowie. Określić maksymalną liczbę ludzi w Warszawie, dla których jesteśmy pewni, że mają taką samą, dodatnią ilość włosów na głowie.
- Rozwiązanie:
 - Traktując ludzi jako przedmioty oraz ilość włosów jako szufladki, zgodnie z ogólniejszą wersją zasady szufladkowej Dirichleta jesteśmy pewni, że w jednej szufladce na pewno będzie co najmniej



Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.

- Wiemy, że w Warszawie jest około 1.700.000 mieszkańców oraz, że człowiek ma co najwyżej 150.000 włosów na głowie. Określić maksymalną liczbę ludzi w Warszawie, dla których jesteśmy pewni, że mają taką samą, dodatnią ilość włosów na głowie.
- Rozwiązanie:
 - Traktując ludzi jako przedmioty oraz ilość włosów jako szufladki, zgodnie z ogólniejszą wersją zasady szufladkowej Dirichleta jesteśmy pewni, że w jednej szufladce na pewno będzie co najmniej $\left\lceil \frac{1.700.000}{150.000} \right\rceil = \left\lceil 11 \frac{1}{3} \right\rceil = 12$ przedmiotów. Szukana ilość to 12.



Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.

- Wiemy, że w Warszawie jest około 1.700.000 mieszkańców oraz, że człowiek ma co najwyżej 150.000 włosów na głowie. Określić maksymalną liczbę ludzi w Warszawie, dla których jesteśmy pewni, że mają taką samą, dodatnią ilość włosów na głowie.
- Rozwiązanie:
 - Traktując ludzi jako przedmioty oraz ilość włosów jako szufladki, zgodnie z ogólniejszą wersją zasady szufladkowej Dirichleta jesteśmy pewni, że w jednej szufladce na pewno będzie co najmniej $\left\lceil \frac{1.700.000}{150.000} \right\rceil = \left\lceil 11\frac{1}{3} \right\rceil = 12$ przedmiotów. Szukana ilość to 12.
- KONIEC.



Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Dlaczego tak późno?*
- *Czy to jest w ogóle przydatne?*
- *Zad.1 – kobiety i mężczyźni.*
- *Zad.2 – włosy na głowie.*
- *Zaawansowane sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.*
- *Zad.3 – znajomi.*
- *Zadania do samodzielnego wykonania.*



Zad.3 – znajomi.

- Udowodnij, że w grupie n osób istnieje taka para ludzi, którzy znają taką samą ilość osób w grupie.
- (Zakładamy, że jeżeli A zna B, to B zna A)



Zad.3 – znajomi.

- Udowodnij, że w grupie n znajomych istnieje taka para ludzi, którzy znają taką samą ilość osób w grupie.

Zad.3 – znajomi.

- Udowodnij, że w grupie n znajomych istnieje taka para ludzi, którzy znają taką samą ilość osób w grupie.
- Rozwiązanie:

Zad.3 – znajomi.

- Udowodnij, że w grupie n znajomych istnieje taka para ludzi, którzy znają taką samą ilość osób w grupie.
- Rozwiązanie:
 - Znow niech ludzie będą przedmiotami.

Zad.3 – znajomi.

- Udowodnij, że w grupie n znajomych istnieje taka para ludzi, którzy znają taką samą ilość osób w grupie.
- Rozwiązanie:
 - Znow niech ludzie będą przedmiotami.
 - Pudełka będą reprezentować ile osób zna dana osoba, którą umieścimy w pudełku.

Zad.3 – znajomi.

- Udowodnij, że w grupie n znajomych istnieje taka para ludzi, którzy znają taką samą ilość osób w grupie.
- Rozwiązanie:
 - Znow niech ludzie będą przedmiotami.
 - Pudełka będą reprezentować ile osób zna dana osoba, którą umieścimy w pudełku.
 - Pudełka będą reprezentowane więc przez liczby: $0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Zad.3 – znajomi.

- Udowodnij, że w grupie n znajomych istnieje taka para ludzi, którzy znają taką samą ilość osób w grupie.
- Rozwiązanie:
 - Znow niech ludzie będą przedmiotami.
 - Pudełka będą reprezentować ile osób zna dana osoba, którą umieścimy w pudełku.
 - Pudełka będą reprezentowane więc przez liczby: $0, 1, 2, \dots, n - 1$.
 - Mamy więc n pudełek. Nic z tego niestety nie wynika.

Zad.3 – znajomi.

- Udowodnij, że w grupie n znajomych istnieje taka para ludzi, którzy znają taką samą ilość osób w grupie.
- Rozwiązanie:
 - Znow niech ludzie będą przedmiotami.
 - Pudełka będą reprezentować ile osób zna dana osoba, którą umieścimy w pudełku.
 - Pudełka będą reprezentowane więc przez liczby: $0, 1, 2, \dots, n - 1$.
 - Mamy więc n pudełek. Nic z tego niestety nie wynika.
 - Jednak, gdy się zastanowimy, to nie może być naraz pudełka 0 oraz pudełka $n - 1$, mamy więc tak naprawdę maksymalnie $n - 1$ pudełek, stąd i z zasady szufladkowej Dirichleta wynika rozwiązanie zadania.

Plan prezentacji

- *Podstawowe sformułowanie.*
- *Dlaczego tak późno?*
- *Czy to jest w ogóle przydatne?*
- *Zad.1 – kobiety i mężczyźni.*
- *Zad.2 – włosy na głowie.*
- *Zaawansowane sformułowanie.*
- *Ogólne sformułowanie.*
- *Zad.2' – włosy na głowie jeszcze raz.*
- *Zad.3 – znajomi.*
- ***Zadania do samodzielnego wykonania.***



Zadania do samodzielnego wykonania

- Zad I. Wśród 13 znajomych, znajdzie się na pewno dwóch, którzy urodzili się tego samego miesiąca.
- Zad II. Jak dużo ludzi potrzeba, by być pewnym tego, że 2 obchodzi urodziny tego samego dnia w roku? (a co gdyby zamiast 2 było n ?)
- Zad III. Jest n ludzi w pokoju. Niektórzy z nich witają się uściskamy dłoni (co najwyżej raz). Udowodnić, że wśród nich jest taka para ludzi, którzy wymienili taką samą ilość uścisków dłoni.

Zasada szufladkowa Dirichleta. Podstawy.

dr inż. Michał Zwierzyński