Tomasz Tkocz
ttkocz@gmail.com

Warsztaty MINI-Akademii
Niestandardowe rozwiązania zadań geometrycznych

15 I 2011r.

1. Dany jest trójkąt równoboczny ABC i punkt P leżący na krótszym łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnić, że $PA = PB + PC$.

2. Czworościan c_1 jest zawarty w czworościanie c_2. Czy z tego wynika, że suma długości krawędzi czworościanu c_1 jest mniejsza od sumy długości krawędzi czworościanu c_2?

3. Punkt P leży wewnątrz prostokąta $ABCD$. Udowodnić, że pole tego prostokąta jest nie większe od $AP \cdot PC + BP \cdot PD$.

4 (domowe)**.** Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ wybrano punkt P tak, aby $\angle PDA = \angle PBA$. Udowodnić, że wartość wyrażenia $AP \cdot PC + BP \cdot PD$ nie zależy od punktu P.

5. Udowodnić, że w siedmiokącie foremnym $A_1A_2 \ldots A_7$ zachodzi $\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}$.

6 (domowe)**.** Udowodnić, że w dziesięciokącie foremnym $A_1A_2 \ldots A_{10}$ zachodzi $\frac{A_1A_2}{A_2A_5} + \frac{A_1A_9}{A_9A_5} = 1$.

7 (LVOM)**.** Pięciokąt foremny ma bok długości 1. Ile wynosi długość jego przekątnej? Obliczyć $\cos 36°$.

8 (Punkt Gergonne'a)**.** Udowodnić, że odcinki łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności przeciwległych boków do okręgu wpisanego w trójkąt są współliniowe.

9 (Punkt Nagela)**.** W trójkącie odcinki łączące wierzchołki z punktami styczności przeciwległych boków do okręgów dopisanych do trójkąta są współliniowe.

10. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty K, L, M to środki boków BC, CA, AB odpowiednio. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego. Jego promień niech wynosi R zaś promień okręgu wpisanego niech wynosi r. Udowodnić, że $OK + OL + OM = R + r$. Co można powiedzieć dla trójkąta rozwartokątnego?

11 (WDDD)**.** Na płaszczyźnie danych jest $2n$ różnych punktów: n z nich jest białych oraz n czarnych. Udowodnić, że można tak narysować n odcinków, o końcach w danych $2n$ punktach, aby końce były różnokolorowe oraz narysowane odcinki nie przecinały się.