I ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH

(METODA ZMODYFIKOWANYCH ELIMINACJI JORDANA-GAUSSA – „tabelkowa")

PLAN:

1) Reguły wymiany zmiennych

2) Reguły tzw. pełnej eliminacji J-G względem elementu $\boxed{a_{kl}}$ **różnego od zera**

3) Reguły tzw. częściowej eliminacji J-G względem elementu $\boxed{a_{kl}}$ **różnego od zera**

Przypadek pożądany, gdy $a_{kl} = 1 \text{ lub } -1$ **(→ tablice clb)**

4) Technika przekształcania (eliminacji) układu równań przez ciąg „tabelek"

Przypadki: **dokładnie jedno rozwiązanie albo**
nieskończenie wiele rozwiązań (zmienne bazowe i parametryczne) albo
sprzeczny (brak rozwiązań – STOP)

1) Reguły wymiany zmiennych

Przykład:

$$\begin{cases} y_1 = a_{10} + a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) \\ y_2 = a_{20} + a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) \end{cases} \overset{\text{zapis}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{r|c:cc} & & \uparrow & \\ & 1 & -x_1 & -x_2 \\ \hline y_1 = & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ \leftarrow y_2 = & a_{20} & \boxed{a_{21} \neq 0} & a_{22} \end{array} \quad \text{np.} \quad \begin{array}{r|c:cc} & & \uparrow & \\ & 1 & -x_1 & -x_2 \\ \hline y_1 = & 2 & 3 & -4 \\ \leftarrow y_2 = & -3 & \boxed{2 \neq 0} & 5 \end{array}$$

Przekształcenie tabelki:

$$\begin{cases} y_1 = a'_{10} + a'_{11}(-y_2) + a'_{12}(-x_2) \\ x_1 = a'_{20} + a'_{21}(-y_2) + a'_{22}(-x_2) \end{cases} \overset{\text{zapis}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{r|c:cc} & 1 & -y_2 & -x_2 \\ \hline y_1 = & a'_{10} & a'_{11} & a'_{12} \\ x_1 = & a'_{20} & a'_{21} & a'_{22} \end{array} \quad \text{np.} \quad \begin{array}{r|c:cc} & 1 & -y_2 & -x_2 \\ \hline y_1 = & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{23}{2} \\ x_1 = & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}$$

4 kroki:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1)\ a'_{21} = \dfrac{1}{a_{21}} & 2)\ a'_{20} = \dfrac{a_{20}}{a_{21}},\ a'_{22} = \dfrac{a_{22}}{a_{21}} \\[2ex] 3)\ a'_{11} = -\dfrac{a_{11}}{a_{21}} & 4)\ a'_{ij} = \dfrac{a_{ij} \cdot a_{21} - a_{i1} \cdot a_{2j}}{a_{21}} \text{ dla } i = 1 \text{ i } j \in \{0, 2\} \end{array}}$$

2) Reguły tzw. <u>pełnej</u> eliminacji J-G względem elementu $\boxed{a_{kl}}$ różnego od zera

1) W miejsce elementu centralnego wstaw jego odwrotność.

2) Pozostałe elementy *k*-tego **wiersza operacyjnego** podziel przez element centralny.

3) Pozostałe elementy *l*-tej **kolumny operacyjnej** podziel przez element centralny i zmień znak.

4) Pozostałe elementy a'_{ij} oblicz według tzw. reguły **prostokąta**: iloczyn elementów na przekątnej **prowadzącej do elementu centralnego** minus iloczyn pozostałych elementów (na drugiej przekątnej) i wynik podziel przez element centralny, co pokazuje poniższy schemat:

utwórz prostokąt: $\begin{matrix} (a_{ij}) & \dots & a_{il} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{kj} & \dots & \boxed{a_{kl}} \end{matrix}$ **i wówczas**: $a'_{ij} = \dfrac{a_{ij}\, a_{kl} - a_{il}\, a_{kj}}{a_{kl}}$.

np. $\begin{matrix} (-1) & \dots & -2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 4 & \dots & \boxed{3} \end{matrix}$ $\frac{-3+8}{3} = \frac{5}{3}$ $\begin{matrix} -2 & \dots & (-2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \boxed{3} & \dots & 5 \end{matrix}$ $\frac{-6+10}{3} = \frac{4}{3}$ $\begin{matrix} -2 & \dots & \boxed{-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ (4) & \dots & -5 \end{matrix}$ $\frac{-4-10}{-1} = 14$ $\begin{matrix} \boxed{-2} & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 4 & \dots & (1) \end{matrix}$ $\frac{-2+4}{-2} = -1$

3) Reguły tzw. <u>częściowej</u> eliminacji J-G względem elementu $\boxed{a_{kl}}$ różnego od zera

$$\begin{array}{r|c:cc} & & \uparrow & \\ & 1 & -x_1 & -x_2 \\ \hline 0= & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ \leftarrow 0= & a_{20} & \boxed{a_{21}\neq 0} & a_{22} \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{r|c:cc} & & \textbf{out} & \\ & & \vee & \\ & 1 & 0 & -x_2 \\ \hline 0= & a'_{10} & a'_{11} & a'_{12} \\ x_1= & a'_{20} & a'_{21} & a'_{22} \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{r|c:c} & 1 & -x_2 \\ \hline 0= & a'_{10} & a'_{12} \\ x_1= & a'_{20} & a'_{22} \end{array}$$

Reguły: 2) Pozostałe elementy k-tego **wiersza operacyjnego** podziel przez element centralny.

4) Pozostałe elementy a'_{ij} oblicz według reguły **prostokąta**

Przykład:

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 5x-y=3 \end{cases} \overset{\text{zapis}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{r|c:cc} & & & \uparrow \\ & 1 & -x & -y \\ \hline 0= & 8 & 2 & 3 \\ \leftarrow 0= & -3 & -5 & \boxed{1} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|c:c|l} & 1 & -x & \\ \hline 0= & 17 & 17 & :17 \\ y= & -3 & -5 & \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|c:c} & & \uparrow \\ & 1 & -x \\ \hline \leftarrow 0= & 1 & \boxed{1} \\ y= & -3 & -5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|c:} & 1 \\ \hline x= & 1 \\ y= & 2 \end{array}$$

ROZWIĄZYWANIE: **1) Wyjściowy układ równań zapisujemy w postaci tabelki:**

$$\begin{array}{r|c:ccc} & 1 & -x_1 & \dots & -x_n \\ \hline 0= & b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0= & b_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

2) Następnie dokonujemy przejścia do następnych tabelek poprzez wybór niezerowych elementów centralnych (preferowane są ± 1!), leżących w 0-wierszach (równaniach) i powodujących wymianę zmiennych (oznaczonych strzałkami): zera „na górę" tabelki, a zmienne w miejsce zer (bez minusów). Oczywiście opuszczamy za każdym razem kolumny operacyjne nad tymi zerami, co powoduje zmniejszenie („uszczuplenie") tabelki oraz dokonujemy częściowej eliminacji.

Zwracamy uwagę na **dwie sytuacje**, które mogą się zajść w tabelce:

– jeśli pojawi się **wiersz złożony z samych zer** $\begin{array}{r|c:ccc} 0= & 0 & 0 & \overbrace{\dots}^{\text{same zera}} & 0 \end{array}$, to go **wykreślamy**

– jeśli pojawi się **wiersz postaci** $\begin{array}{r|c:ccc} 0= & \neq 0 & 0 & \overbrace{\dots}^{\text{same zera}} & 0 \end{array}$

to proces przerywamy i stwierdzamy, że układ jest sprzeczny.

3) Dokonujemy tyle eliminacji J-G, aż wszystkie zera stojące po lewej stronie tabelki zostaną wymienione ze zmiennymi na jej górze.

4) ODPOWIEDŹ (końcowa tablica – brak zer po lewej stronie)

$$
\begin{array}{c|c:ccccc}
 & 1 & -x_{s_1} & \cdots & \overset{\text{parametry}}{-x_{s_l}} & \cdots & -x_{s_p} \\
\hline
x_{b_1} = & y_{10} & y_{11} & \cdots & y_{1l} & \cdots & y_{1p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{b_k} = & y_{k0} & y_{k1} & \cdots & y_{kl} & \cdots & y_{kp} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{b_q} = & y_{q0} & y_{q1} & \cdots & y_{ql} & \cdots & y_{qp}
\end{array}
$$

Podział zmiennych:

Zmienne występujące na górze tablicy (jeśli takie są) przyjmujemy jako **parametry** – **zmienne swobodne** (rzeczywiste).

Zmienne stojące po lewej stronie tablicy (ze znakiem =) są zmiennymi **bazowymi** i wyrażają się one przez zmienne swobodne (parametry). Równości czytane z tabelki dają odpowiedź (niejednoznaczną).

Dokładnie jedno rozwiązanie układu – brak zmiennych parametrycznych (końcowa tabelka jest zredukowana do jednej kolumny „pod 1”).

II TABLICE (SYMPLEKSOWE)

– dodanie „zerowego" wiersza FC (funkcji celu) $\pm x_0 = \;|\; y_{00} \;\vdots\; y_{01} \;\ldots\; y_{0l} \;\ldots\; y_{0p}$

– przy <u>optymalizacji clb</u> dodanie na końcu tabeli nierówności – <u>odcięcia</u>

[odcięcie odpowiada pewnemu <u>wierszowi źródłowemu</u> o numerze *r* i ma odpowiednią postać, np. w <u>algorytmie Gomory'ego</u> $s = \;|\; -Fr(y_{r0}) \;\vdots\; -Fr(y_{r1}) \;\ldots\; -Fr(y_{rl}) \;\ldots\; -Fr(y_{rp})$ **]**

(*Fr* – część <u>ułamkowa</u>, *E* – część <u>całkowita</u> : $x = E(x) + Fr(x)$, np. $\frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$, $-\frac{4}{3} = -2 + \frac{2}{3}$)

	$+\max$ / $-\min$	1	$-x_{s_1}$	$\ldots$	$-x_{s_l}$	$\ldots$	$-x_{s_p}$
	$\pm x_0 =$	$\boldsymbol{y_{00}}$	$\boldsymbol{y_{01}}$	$\ldots$	$\boldsymbol{y_{0l}}$	$\ldots$	$\boldsymbol{y_{0p}}$
	$x_{b_1} =$	y_{10}	y_{11}	$\ldots$	y_{1l}	$\ldots$	y_{1p}
źródł.	$\boldsymbol{x_{b_r}} =$	y_{r0}	$\boldsymbol{y_{r1}}$	$\vdots$	$\boldsymbol{y_{rl}}$	$\vdots$	$\boldsymbol{y_{rp}}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$x_{b_q} =$	y_{q0}	y_{q1}	$\ldots$	y_{ql}	$\ldots$	y_{qp}
	odcięcie $\boldsymbol{s} =$	$\square$	$\square$	$\ldots$	$\square$	$\ldots$	$\square$

III LINIOWY MODEL OPTYMALIZACYJNY (POL, POLC)

FC: $x_0 = c_0 + c_1(-x_1) + c_2(-x_2) + \ldots + c_n(-x_n) \to \max$ $\quad \left[x_0 \to \min \Rightarrow -x_0 \to \max \text{ i odwrotnie}\right]$

O: układ nierówności postaci $\tilde{a}_{i1}\, x_1 + \tilde{a}_{i2}\, x_2 + \ldots + \tilde{a}_{im}\, x_m \; \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} \; b_i$

zamiana na <u>równości</u> przez wprowadzenie dodatkowych zmiennych nieujemnych

„niedomiaru” $\tilde{a}_{i1}\, x_1 + \tilde{a}_{i2}\, x_2 + \ldots + \tilde{a}_{im}\, x_m \leq b_i \Leftrightarrow \tilde{a}_{i1}\, x_1 + \tilde{a}_{i2}\, x_2 + \ldots + \tilde{a}_{im}\, x_m + x_{m+1} = b_i$

„nadmiaru” $\tilde{a}_{i1}\, x_1 + \tilde{a}_{i2}\, x_2 + \ldots + \tilde{a}_{im}\, x_m \geq b_i \Leftrightarrow \tilde{a}_{i1}\, x_1 + \tilde{a}_{i2}\, x_2 + \ldots + \tilde{a}_{im}\, x_m - x_{m+1} = b_i$

warunki nieujemności zmiennych: $x_j \geq 0$

dodatkowe warunki (POLC), że zmienne są liczbami całkowitymi: $x_j \in Z \overset{\text{zapis}}{\Leftrightarrow} x_j$ **clb**

TABLICA (w skrócie T)

$$\begin{array}{c|c:cccc}
\max & 1 & -x_{s_1} & \dots & -x_{s_p} \\ \hline
x_0 = & y_{00} & y_{01} & \dots & y_{0p} \\ \hdashline
x_{b_1} = & y_{10} & y_{11} & \dots & y_{1p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{b_q} = & y_{q0} & y_{q1} & \dots & y_{qp}
\end{array}
\quad \overset{\text{skr.}}{\Longleftrightarrow} \quad
\begin{array}{c:c:c}
\max & 1 & -\mathbf{x}_s \\ \hline
x_0 = & \mathbf{y}_{00} & \mathbf{y}_0^{(\mathrm{w})} \\ \hdashline
\mathbf{x}_b = & \mathbf{y}_0^{(\mathrm{k})} & \mathbf{Y} = \left[y_{ij} \right]_{q \times p}
\end{array}$$

$$\mathbf{x}(\mathrm{T}) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_b = \mathbf{y}_0^{(\mathrm{k})} \\ \hdashline \mathbf{x}_s = \mathbf{0} \end{array} \right], \quad x_0\left(\mathbf{x}(\mathrm{T})\right) = \mathbf{y}_{00}$$

T DOPUSZCZALNA $\Leftrightarrow$ $\mathbf{y}_0^{(\mathrm{k})} \geq 0$; **T DAJĄCA ROZWIĄZANIE CLB** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{y}_0^{(\mathrm{k})}$ **clb**

T DUALNIE DOPUSZCZALNA $\Leftrightarrow$ $\mathbf{y}_0^{(\mathrm{w})} \geq 0$

$\hat{\mathrm{T}}$ **OPTYMALNA (POL)** $\Leftrightarrow$ **DOPUSZCZALNA I DUALNIE DOPUSZCZALNA** $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \mathbf{y}_0^{(\mathrm{k})} \geq 0 \\ \mathbf{y}_0^{(\mathrm{w})} \geq 0 \end{cases}$

$\hat{\mathrm{T}}$ **OPTYMALNA (POLC)** $\Leftrightarrow$ **DOPUSZCZALNA I DAJĄCA ROZWIĄZANIE CLB I DUALNIE DOPUSZCZALNA**

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{y}_0^{(\mathrm{k})} \geq 0 \ \wedge\ \mathbf{y}_0^{(\mathrm{k})}$ **clb** $\wedge\ \mathbf{y}_0^{(\mathrm{w})} \geq 0$ **, wartość rozwiązania optymalnego:** $\hat{x}_0 = \hat{\mathbf{y}}_{00}$

ALGORYTM POL AS – ZASADA DZIAŁANIA

1) Uzyskaj T_0 DOPUSZCZALNĄ

2) Przejdź do następnych tablic

$$T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots \to \hat{T}$$

tak, żeby zachować dopuszczalność i przywrócić dualną dopuszczalność, przez odpowiedni dobór elementu centralnego $\boxed{a_{kl}}$ wg reguł:

w tej kolumnie *l*-tej, gdzie zerowy wskaźnik jest ujemny:

a_{kl} dodatni i *k*-ty wiersz wybrany zgodnie **z**

regułą min stosunków sympleksowych:

ilorazów elementów nieujemnych zerowej kolumny przez odpowiadające elementy dodatnie *l*- tej kolumny.

ALGORYTM POL DAS – ZASADA DZIAŁANIA

1) Uzyskaj T_0 DUALNIE DOPUSZCZALNĄ

2) Przejdź do następnych tablic

$$T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots \to \hat{T}$$

tak, żeby zachować dualną dopuszczalność i przywrócić dopuszczalność, przez odpowiedni dobór elementu centralnego $\boxed{a_{kl}}$ wg reguł:

w tym wierszu *k*-tym, gdzie współrzędna rozwiązania jest ujemna:

a_{kl} ujemne i *l*-ta kolumna wybrana zgodnie z

regułą max dualnych **stosunków sympleksowych:**

ilorazów elementów nieujemnych zerowego wiersza przez odpowiadające elementy ujemne *k*- tego wiersza.

METODA ODCIĘĆ W POLC

ALGORYTM AS CLB

1) START: T_0 tablica DOPUSZCZALNA I DAJĄCA ROZWIĄZANIE CLB

2) Przejście do następnych tablic z zachowaniem dopuszczalnego rozwiązania clb i przywracaniem dualnej dopuszczalności przez dodanie na końcu tablic odcięć zachowujących dopuszczalne rozwiązania clb; eliminacje są z elementem centralnym $\boxed{a_{kl} = 1}$, *k* – końcowy wiersz tablicy

Odcięcie odpowiada temu wierszowi źródłowemu *r*, który ma najmniejszy stosunek sympleksowy (ilorazy elementów nieujemnych zerowej kolumny przez odpowiadające elementy większe od 1 *l*- tej kolumny oper., dla której $y_{0l} < 0$) i ma postać:

	1	$-x_{s_1}$	$\dots$	$-x_{s_l}$	$\dots$	$-x_{s_p}$
$x_0 =$	y_{00}	y_{01}	$\dots$	$y_{0l} < 0$	$\dots$	y_{0p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow x_{b_r} =$	y_{r0}	y_{r1}	$\dots$	$y_{rl} > 1$	$\dots$	y_{rp}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\to s_1 =$	$E\left(\frac{y_{r0}}{y_{rl}}\right)$	$E\left(\frac{y_{r0}}{y_{rl}}\right)$	$\dots$	$\boxed{1}$	$\dots$	$E\left(\frac{y_{rp}}{y_{rl}}\right)$

UWAGA:

Gdy $y_{rl} = 1$, dokonać eliminacji względem tego elementu, bez tworzenia odcięcia.

METODA ODCIĘĆ W POLC

ALGORYTM (GOMORY'EGO

1) UZYSKANIE TABLICY T̃ DOPUSZCZALNEJ I DUALNIE DOPUSZCZALNEJ, ALE NIE DAJĄCEJ ROZWIĄZANIA CLB (stosując AS)

2) Przejście do następnych tablic z zachowaniem dopuszczalności i dualnej dopuszczalności, z przywracaniem rozwiązania clb, przez dodanie na końcu tablic odcięć .

Odcięcie odpowiada wierszowi źródłowemu – najwyższemu wierszowi o numerze r tablicy (włącznie z zerowym), w którym y_{r0} jest nclb i ma postać:

	1	$-x_{s_1}$	$\dots$	$-x_{s_l}$	$\dots$	$-x_{s_p}$
$x_0 =$	y_{00}	y_{01}	$\dots$	y_{0l}	$\dots$	y_{0p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow x_{b_r} =$	y_{r0} nclb	y_{r1}	$\dots$	y_{rl}	$\dots$	y_{rp}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\rightarrow s_1 =$	$-Fr(y_{r0})$	$-Fr(y_{r1})$	$\dots$	$-Fr(y_{rl})$	$\dots$	$-Fr(y_{rp})$

W celu przywrócenia dopuszczalności w ostatnim wierszu (tzw. reoptymalizacji) stosujemy DAS

SYTUACJE SZCZEGÓLNE

1) JEDNO ROZWIĄZANIE OPTYMALNE

$$\hat{\mathrm{T}}:\quad \begin{array}{r|c|c}
 & 1 & -\mathbf{x}_s \\ \hline
\pm x_0 = & \mathbf{y}_{00} & \mathbf{y}_0^{(\mathrm{w})} > 0 \\ \hline
\mathbf{x}_b = & \mathbf{y}_0^{(\mathrm{k})} \geq 0 & \mathbf{Y} = \left[y_{ij} \right]_{q \times p}
\end{array}$$

2) ROZWIĄZANIA OPTYMALNE ALTERNATYWNE

$$\hat{\mathrm{T}}:\quad \begin{array}{r|c|c}
 & 1 & -\mathbf{x}_s \\ \hline
\pm x_0 = & \mathbf{y}_{00} & 0 \ldots 0 \ \ldots \ 0 \\ \hline
\mathbf{x}_b = & \mathbf{y}_0^{(\mathrm{k})} \geq 0 & \mathbf{Y} = \left[y_{ij} \right]_{q \times p}
\end{array}$$

(znajdujemy przez eliminacje rozwiązania alternatywne $\hat{\mathbf{X}}_1,\ \hat{\mathbf{X}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{X}}_k$,

Rozwiązanie optymalne – <u>kombinacja wypukła</u> rozwiązań alternatywnych postaci

$$\boxed{\alpha_1 \hat{\mathbf{X}}_1 + \alpha_2 \hat{\mathbf{X}}_2 + \ldots + \alpha_k \hat{\mathbf{X}}_k,\ \begin{cases} \alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0, \ldots, \alpha_k \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1 \end{cases}}$$

3) ROZWIĄZANIE NIEOGRANICZONE $\pm x_0 \to \infty$

$$\mathrm{T}:\quad \begin{array}{r|c|ccccc}
 & 1 & -x_{s_1} & \ldots & -\boldsymbol{x}_{s_l} & & \ldots \\ \hline
\pm x_0 = & y_{00} & y_{01} & \ldots & \boldsymbol{y}_{0l} & \leq 0 & \ldots \\ \hline
x_{b_1} = & y_{10} \geq 0 & y_{11} & \ldots & \boldsymbol{y}_{0l} & \leq 0 & \ldots \\
\vdots & \vdots \geq 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \leq 0 & \ldots \\
x_{b_q} = & y_{q0} \geq 0 & y_{q1} & \ldots & \boldsymbol{y}_{0l} & \leq 0 & \ldots
\end{array}$$

4) ZBIÓR DOPUSZCZALNYCH ROZWIĄZAŃ – PUSTY

istnieje wiersz sprzeczny, np. $0 = \mid y_{k0} > 0 \mid y_{k1} \leq 0 \quad \ldots \leq 0 \quad y_{kp} \leq 0$ **lub** $x_{b_k} = \mid y_{k0} < 0 \mid y_{k1} \leq 0 \quad \ldots \leq 0 \quad y_{kp} \leq 0$

METODA GEOMETRYCZNA ROZWIĄZYWANIA POL

DOTYCZY ZAGADNIENIA POL 2-WYMIAROWEGO POSTACI:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{FC:} & x_0 = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 \;\rightarrow\; \max \\ \text{O:} & \begin{cases} \tilde{a}_{11} x_1 + \tilde{a}_{12} x_2 \le b_1 \\ \tilde{a}_{21} x_1 + \tilde{a}_{22} x_2 \le b_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{m1} x_1 + \tilde{a}_{m2} x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0 \;\wedge\; x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}}$$

Krok 1: Na płaszczyźnie OXY wyrysuj **wielobok *D*** określający zbiór ograniczeń O (różne sytuacje).

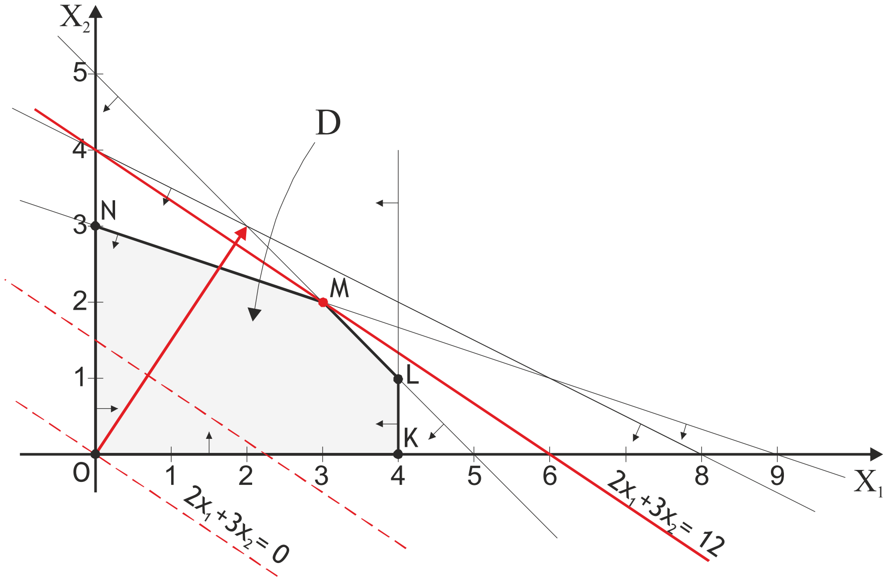
Krok 2: Badamy położenie tzw. **warstwic (prostych o równaniach** $c_1 x_1 + c_2 x_2 = C\,,\; C \in \boldsymbol{R}$) względem $\boldsymbol{D}$ **:**

wykreślamy warstwicę przechodzącą przez punkt (0,0) o równaniu $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$, zaznaczając wektor **prostopadły** do warstwic $\vec{\mathbf{n}}_{\perp} = [c_1, c_2]$, **wskazujący kierunek wzrastania FC**, a następnie przesuwamy ją równolegle w kierunku wskazanym przez zwrot wektora $\vec{\mathbf{n}}_{\perp}$

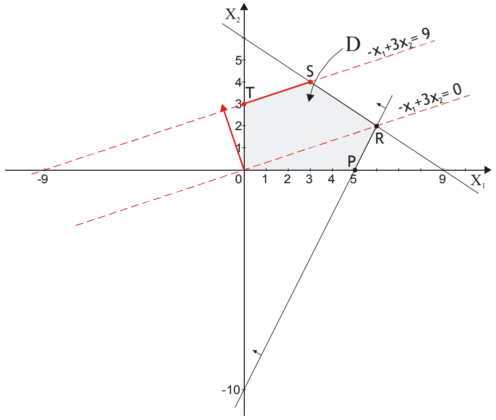
Mogą zajść **następujące przypadki**:

a) Gdy D jest wielobokiem **ograniczonym**, to w położeniu **granicznym** istnieje prosta – warstwica o równaniu $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \hat{C}$ taka, że zbiór D znajduje się całkowicie po jednej jej stronie, tzn. $\forall \left(x_1, x_2\right) \in D,\ c_1 x_1 + c_2 x_2 \le \hat{C}$, przy czym część wspólna tej warstwicy ze zbiorem D jest zbiorem jednoelementowym, będącym pewnym **wierzchołkiem** wieloboku D (przypadek **jednego rozwiązania optymalnego**) albo jest pewnym **bokiem** wieloboku – odcinkiem łączącym **dwa** jego wierzchołki, zawartym w warstwicy (**przypadek nieskończenie wielu rozwiązań optymalnych** – **alternatywnych**). Mówimy, że POL jest rozwiązalny, a maksymalna wartość funkcji celu wynosi $\hat{x}_0 = c_0 + \hat{C}$.

b) Gdy D jest wielobokiem **nieograniczonym**, to postępując tak jak w a), może się zdarzyć, że albo POL jest rozwiązalny i największą wartość $\hat{x}_0 = c_0 + \hat{C}$ osiąga się w **jednym** wierzchołku lub na pewnym **boku**, ewentualnie **krawędzi nieskończonej** wieloboku D (na warstwicy $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \hat{C}$), albo przeciwnie – jest widoczne, że nie otrzymuje się położenia granicznego, co oznacza, że $x_0 \to +\infty$ i wówczas mówimy, że POL jest **nieograniczony** (nie istnieje rozwiązanie optymalne).



Rys. 1.1



Rys. 1.2

FC: $x_0 = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$
\text{O:} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
$$

$\mathrm{T}_2 = \hat{\mathrm{T}}$:

	1	$-x_3$	$-x_4$
$x_0 =$	12	+	+
$x_1 =$	3		
$x_2 =$	2		
$x_5 =$	1		
$x_6 =$	1		

FC: $x_0 = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$

$$
\text{O:} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 - x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
$$

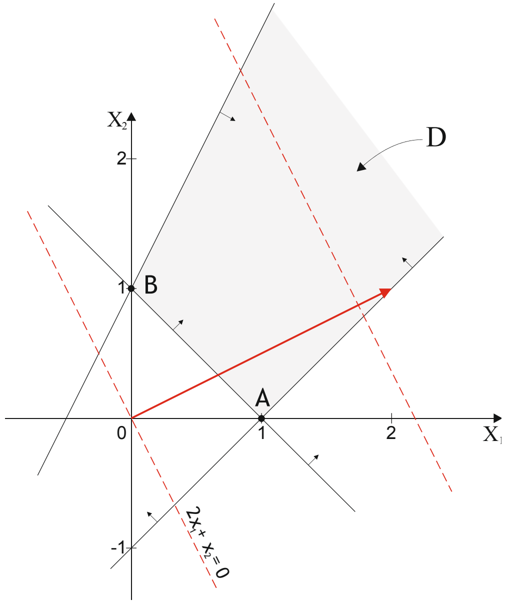
$\mathrm{T}_1 = \hat{\mathrm{T}}$:

	1	$\uparrow -x_1$	$-x_3$	
$-x_0 =$	9	0	1	
$x_2 =$	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\leftarrow x_4 =$	9	$\boxed{3}$	-1	$\frac{9}{3} = \underline{3}$
$x_5 =$	13	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{5/3} = \frac{39}{5}$

$\mathrm{T}_2 = \hat{\mathrm{T}}$:

	1	$-x_4$	$-x_3$
$-x_0 =$	9	0	1
$x_2 =$	4	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
$x_1 =$	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$x_5 =$	8	$-\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$

$$
\hat{\boldsymbol{x}}_{\alpha_1} = \alpha_1 \hat{\boldsymbol{x}}_1 + (1-\alpha_1)\hat{\boldsymbol{x}}_2 \overset{\alpha_1 \in \langle 0,1 \rangle}{=} \begin{bmatrix} 3-3\alpha_1 \\ 4-\alpha_1 \\ 0 \\ 9-\alpha_1 \\ 5\alpha_1+8 \end{bmatrix}
$$



Rys. 1.3

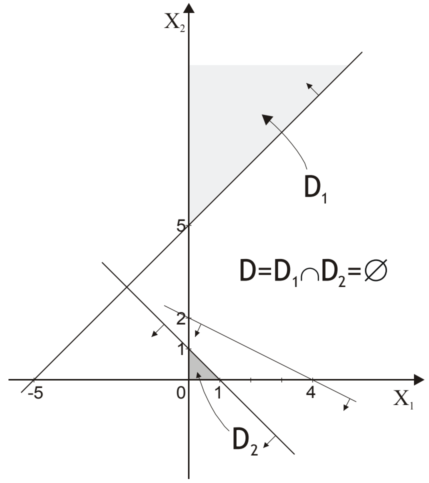
$$\text{FC:}\quad x_0 = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$\text{O:}\quad \begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ 2x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

T_1 :

	1	$-x_2$	$-x_3$
$-x_0 =$	2	-3	2
$x_4 =$	0	-2	1
$x_1 =$	1	-1	1
$x_5 =$	3	-1	2

POL nieograniczony



Rys. 1.4

	1	$-x_1$	$\uparrow$ $-x_2$	$-x_3$	
$x_0 =$	0	-1	-1	0	
$0 =$	5	-1	1	-1	$\frac{5}{1} = 5$
$\leftarrow x_4 =$	1	1	$\boxed{1}$	0	$\frac{1}{1} = \underline{1}$
$x_5 =$	4	1	2	0	$\frac{4}{2} = 2$

$$\text{FC:}\quad x_0 = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\text{O:}\quad \begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

	1	$-x_1$	$-x_4$	$-x_3$
$x_0 =$				
$0 =$	4	-2	-1	-1
$x_2 =$				
$x_5 =$				

Sprzeczność: $0 = 4 + 2x_1 + x_4 + x_3$

Zastosowania ekonomiczne

Optymalny wykorzystanie zasobów w produkcji $(\to \mathrm{AS})$

Przedsiębiorstwa przemysłowe stają przed koniecznością opracowania planów produkcyjnych. Muszą podjąć decyzję co do rodzaju oraz ilości wytwarzania różnych wyrobów, uwzględniając przy tym istniejące warunki produkcji. Jednocześnie chcą osiągnąć możliwie najkorzystniejszy w danych warunkach wynik finansowy.

	P_1 ... P_j ... $P_{\tilde{n}}$	
S_1	$\tilde{a}_{11}$ ... $\tilde{a}_{1j}$ ... $\tilde{a}_{1\tilde{n}}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$ ... $\vdots$ ... $\vdots$	$\vdots$
S_{m-1}	$\tilde{a}_{m-1\,1}$ ... $\tilde{a}_{m-1\,j}$ ... $\tilde{a}_{m-1\,\tilde{n}}$	b_{m-1}
S_m	$\tilde{a}_{m1}$ ... $\tilde{a}_{mj}$ ... $\tilde{a}_{m\tilde{n}}$	b_m
x_0	c_1 ... c_j ... $c_{\tilde{n}}$	

Dysponujemy zasobami $(m-1)$ surowców S_i $\left(i \in \{1,2,\ldots,m-1\}\right)$ równymi b_i oraz zasobem robocizny S_m równym b_m przy produkcji $\tilde{n}$ wyrobów oznaczanych P_j dających zyski jednostkowe c_j $\left(j \in \{1,2,\ldots,\tilde{n}\}\right)$. Niech $\tilde{a}_{ij}$ jest współczynnikiem technologicznym określającym liczbę jednostek (nakład) środka produkcji S_i potrzebną do wytworzenia jednostki produktu P_j. Należy znaleźć plan (asortyment) produkcji dający największy zysk x_0 (wartość produkcji).

Matematyczny model:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{FC:} & x_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_{\tilde{n}}\, x \to \max \\ \text{O:} & \begin{cases} \tilde{a}_{11} x_1 + \tilde{a}_{12} x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1\tilde{n}} x_{\tilde{n}} \le b_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{m1} x_1 + \tilde{a}_{m2} x_2 + \ldots + \tilde{a}_{m\tilde{n}} x_{\tilde{n}} \le b_m \\ \forall\ j \in \{1,2,\ldots,\tilde{n}\},\ \ x_j \ge 0 \end{cases} \end{array}}$$

; x_j oznacza wielkość produkcji wyrobu P_j.

<u>W innej interpretacji</u>: wybór technologii produkcji.

Problem najtańszej diety ($\rightarrow$DAS)

Zadanie sprowadza się do określenia, jakie ilości różnych produktów żywnościowych należy spożyć, aby przy pełnym zaspokojeniu potrzeb organizmu na podstawowe składniki odżywcze i kalorie, koszt wyżywienia był możliwie najniższy. Problem ten może być stawiany w odniesieniu do ludzi (stołówek, pojedynczego człowieka) oraz zwierząt domowych czy hodowlanych. Aby zaspokoić potrzeby organizmu należy spożyć odpowiednie ilości różnych składników odżywczych - białka, węglowodanów, tłuszczów, soli mineralnych, witamin, które są zawarte w różnych produktach żywnościowych. Te pożądane ilości składników pokarmowych podane są w tzw. normach żywieniowych.

Mamy do dyspozycji $\tilde{n}$ produktów (żywnościowych) P_j $\left(j \in \{1, 2, \ldots, \tilde{n}\}\right)$, zawierających m składników odżywczych S_i $\left(i \in \{1, 2, \ldots, m\}\right)$. Niech $\tilde{a}_{ij}$ oznacza zawartość składnika S_i w jednej jednostce produktu P_j, c_j oznacza cenę produktu P_j, a b_i – najmniejsze zapotrzebowanie (normę żywienia) składnika S_i. Należy znaleźć optymalną (najtańszą) dietę, tzn. taki zestaw produktów zapewniający minimalne zapotrzebowanie na wszystkie składniki, aby koszt jego zakupu x_0 był najmniejszy.

Matematyczny model:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{FC:}\quad x_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_{\tilde{n}} x_{\tilde{n}} \rightarrow \min \\ \text{O:}\quad \begin{cases} \tilde{a}_{11} x_1 + \tilde{a}_{12} x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1\tilde{n}} x_{\tilde{n}} \geq b_1 \\ \qquad\vdots \\ \tilde{a}_{m1} x_1 + \tilde{a}_{m2} x_2 + \ldots + \tilde{a}_{m\tilde{n}} x_{\tilde{n}} \geq b_m \\ \forall\ j \in \{1, 2, \ldots, \tilde{n}\},\ \ x_j \geq 0 \end{cases} \end{array}}$$

; x_j oznacza ilość zakupionego produktu P_j.

<u>W innej interpretacji</u>: optymalizacja składu mieszanin (np. ustalenie najtańszego zestawu wsadu różnych metali do stopu, wyznaczenie optymalnego składu komponentów w celu wytworzenia benzyny, zestawienie optymalnego składu zużycia różnych paliw z zachowaniem norm dotyczących zanieczyszczeń środowiska, wyznaczenia najtańszego zestawu dawek nawozów mineralnych lub pasz).

PRZYKŁAD 1

Zakład produkcyjny wytwarza dwa produkty P_1, P_2, zużywając do tego celu trzy środki produkcji: S_1 – energię elektryczną, S_2 – stal, S_3 – drewno oraz robociznę S_4. Zużycie surowców i robocizny na jednostkę wagową, zasoby środków i zyski jednostkowe podane są w tablicy. Jak należy zaplanować produkcję, aby osiągnąć maksymalny zysk? Zbudować model matematyczny, rozwiązać go metodą geometryczną i algorytmem sympleksowym oraz zinterpretować otrzymane wyniki.

Środki produkcji	P_1	P_2	Zasoby
S_1 - energia	5	25	1200
S_2 - stal	5	10	600
S_3 - drewno	6	0	420
S_4 - praca	10	10	900
x_0	10	20	

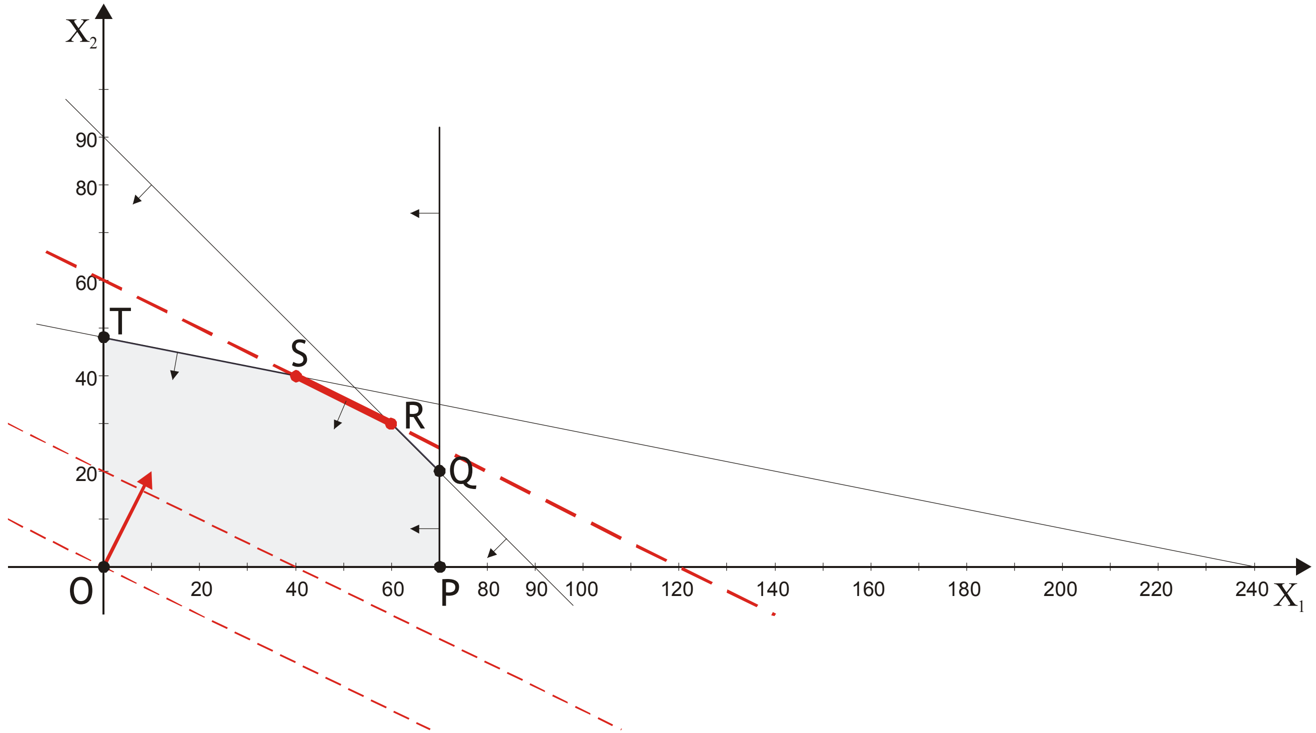
R o z w i ą z a n i e

Zmiennymi decyzyjnymi zadania są: x_1 – liczba wyprodukowanych jednostek produktu P_1, x_2 – liczba wyprodukowanych jednostek produktu P_2.

Model matematyczny POL:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{FC:} & x_0 = 10x_1 + 20x_2 \to \max \\ \text{O:} & \begin{cases} 5x_1 + 25x_2 \le 1200 \\ 5x_1 + 10x_2 \le 600 \\ 6x_1 \le 420 \\ 10x_1 + 10x_2 \le 900 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}}\ .$$

Metoda geometryczna:



Rys. 1.5

Metoda AS (ciąg tablic)

$T_0:$

	1	$-x_1$	$\overset{\uparrow}{-x_2}$		
$x_0 =$	0	-10	-20		
$\leftarrow x_3 =$	1200	5	$\boxed{\boxed{25}}$	$\frac{1200}{5}=240$	$\frac{1200}{25}=\underline{48}$
$x_4 =$	600	5	10	$\frac{600}{5}=120$	$\frac{600}{10}=60$
$x_5 =$	420	$\boxed{6}$	0	$\frac{420}{6}=\underline{70}$	
$x_6 =$	900	10	10	$\frac{900}{10}=90$	$\frac{900}{10}=90$

$T_1:$

	1	$\overset{\uparrow}{-x_1}$	$-x_3$	
$x_0 =$	960	-6	$\frac{4}{5}$	
$x_2 =$	48	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$48:\frac{1}{5}=240$
$\leftarrow x_4 =$	120	$\boxed{3}$	$-\frac{2}{5}$	$120:3=\underline{40}$
$x_5 =$	420	6	0	$420:6=70$
$x_6 =$	420	8	$-\frac{2}{5}$	$420:8=54$

$T_2 = \hat{T}:$

	1	$-x_4$	$\overset{\uparrow}{-x_3}$	
$x_0 =$	1200	2	0	
$x_2 =$	40	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$40:\frac{1}{15}=600$
$x_1 =$	40	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{15}$	
$x_5 =$	180	-2	$\frac{4}{5}$	$180:\frac{4}{5}=225$
$\leftarrow x_6 =$	100	$-\frac{8}{3}$	$\boxed{\frac{2}{3}}$	$100:\frac{2}{3}=\underline{150}$

$T_3 = \hat{T}:$

	1	$-x_4$	$-x_6$
$x_0 =$	1200	2	0
$x_2 =$	30		
$x_1 =$	60		
$x_5 =$	60		
$x_3 =$	150		

Ekstremum globalne jest osiągane na **odcinku** o końcach w otrzymanych punktach S i R, czyli na zbiorze

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\alpha_1} = \alpha_1 \hat{\boldsymbol{x}}_1 + (1-\alpha_1)\hat{\boldsymbol{x}}_2 = \begin{bmatrix} 60-20\alpha_1 \\ 30+10\alpha_1 \\ \hline 150-150\alpha_1 \\ 0 \\ 60+120\alpha_1 \\ 100\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 \in \langle 0,1 \rangle .$$

W interpretacji geometrycznej algorytmu sympleksowego startujemy od wierzchołka O (tablica T_0), przechodzimy do wierzchołka T (tablica T_1), a następnie do dwóch sąsiednich wierzchołków optymalnych S (tablica T_2) i R (tablica T_3).

Zauważmy ponadto, że wprowadzone zmienne dodatkowe mają przejrzystą interpretację ekonomiczną, ponieważ informują o stanie niewykorzystanych zasobów poszczególnych środków produkcji.

W rozwiązaniu optymalnym $\hat{\boldsymbol{x}}_{\alpha_1}$ ($\hat{x}_1 = 60-20\alpha_1$ jednostek produktu P_1 i $\hat{x}_2 = 30+10\alpha_1$ jednostek produktu P_2) mamy więc w zależności od $\alpha_1 \in \langle 0,1 \rangle$: stan niewykorzystanej energii $\hat{x}_3 = 150-150\alpha_1 \geq 0$, zużytą całkowicie stal $\hat{x}_4 = 0$, stan niewykorzystanego drewna $\hat{x}_5 = 60+120\alpha_1 \geq 60$ i robocizny $\hat{x}_6 = 100\alpha_1 \geq 0$. W szczególności, warunek pełnego wykorzystania siły roboczej $\hat{x}_6 = 0$ spełnia jedynie rozwiązanie optymalne $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ (dla $\alpha_1 = 0$).

PRZYKŁAD 2

Produkty P_1 i P_2, służące jako pasza dla trzody chlewnej, zawierają dwa składniki odżywcze S_1 i S_2, które należy dostarczyć zwierzętom co najmniej w ilościach odpowiednio 16 i 45 jednostek. Produkty te zawierają ponadto składnik S_3, którego ilość w spożywanej paszy powyżej 20 jednostek może być szkodliwy. Zawartość poszczególnych składników w tych produktach oraz ceny jednostkowe podane są w poniższej tablicy. Przy jakiej ilości zakupionych produktów P_1 i P_2 koszt zakupu będzie najmniejszy przy równoczesnym zaspokojeniu potrzeb żywienia trzody chlewnej? Zbudować model matematyczny, rozwiązać go metodą geometryczną i dualnym algorytmem sympleksowym DAS oraz zinterpretować otrzymane wyniki.

Składniki odżywcze	P_1	P_2	Zapotrzebowanie
S_1	1	4	min. 16
S_2	9	3	min. 45
S_3	2	2	max. 20
x_0	20	40	

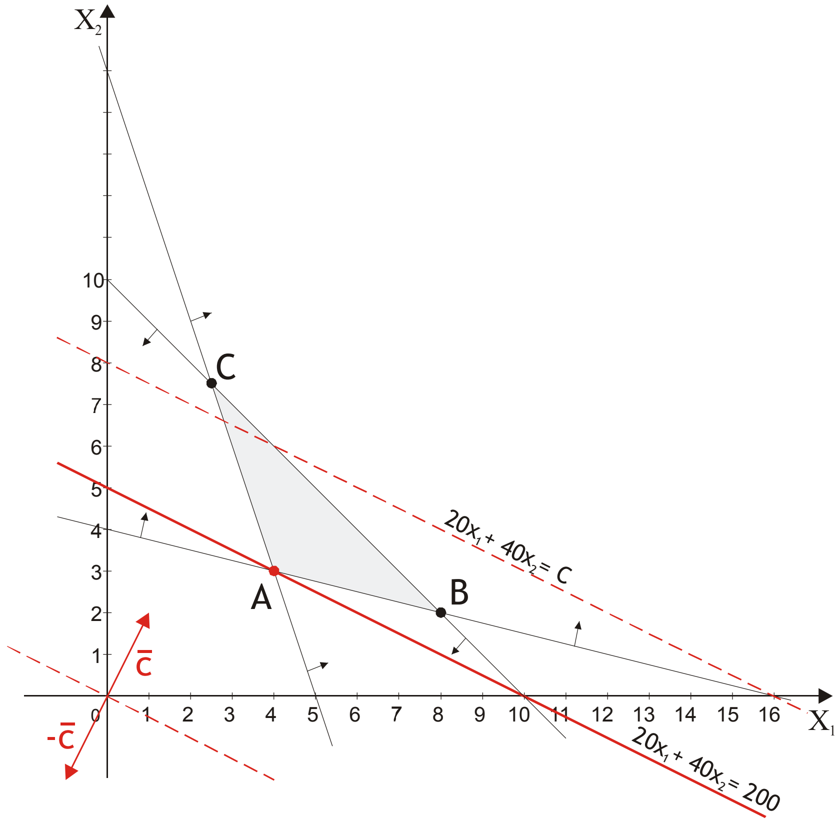
R o z w i ą z a n i e

Zmiennymi decyzyjnymi zadania są: x_1 i x_2 - ilości zakupionych produktów P_1 i P_2 tworzących paszę dla trzody chlewnej.

Model matematyczny POL:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{FC:} & x_0 = 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \min \\ \text{O:} & \begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ 9x_1 + 3x_2 \geq 45 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}}$$

Metoda geometryczna:



Rys. 1.6

Metoda DAS (ciąg tablic)

T_0 :

	1	$\uparrow$ $-x_1$	$-x_2$
$-x_0 =$	0	20	40
$x_3 =$	-16	-1	$\boxed{-4}$
$\leftarrow x_4 =$	-45	$\boxed{\boxed{-9}}$	-3
$x_5 =$	20	2	2
		$\underline{-\frac{20}{9}}$	$-\frac{40}{3}$

T_1 :

	1	$-x_4$	$\uparrow$ $-x_2$
$-x_0 =$	-100	$\frac{20}{9}$	$\frac{100}{3}$
$\leftarrow x_3 =$	-11	-1	$\boxed{-\frac{11}{3}}$
$x_2 =$	5	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
$x_5 =$	10	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{3}$
		-20	$\underline{-\frac{100}{11}}$

$T_2 = \hat{T}$:

	1	$-x_4$	$-x_3$
$-x_0 =$	-200	+	+
$x_2 =$	3		
$x_1 =$	4		
$x_5 =$	6		

Odp. $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ (podać interpretację ekonomiczną diety min.)

PRZYKŁAD 3

Na kupienie instalacji dla nowego działu produkcyjnego zaplanowano 21 tys. zł. Instalacja powinna być rozmieszczona na powierzchni nie przekraczającej 37 m^2. Obejmuje dwa typy maszyn: maszyna A – większej mocy o wartości jednostkowej 3 tys. zł , zajmująca (wraz z przejściem) 6 m^2 i wytwarzająca 7 tys. jednostek produkcji na zmianę oraz maszyna B – mniejszej mocy o wartości jednostkowej 2 tys. zł., zajmująca odpowiednio 3 m^2 i dająca 4 tys. jednostek produkcji na zmianę. Należy znaleźć optymalny wariant instalacji zapewniający przy danych ograniczeniach maksimum produkcji tego działu. Sformułować model matematyczny i znaleźć jego rozwiązanie trzema metodami: geometryczną, algorytmem Gomory'ego i AS CLB.

R o z w i ą z a n i e

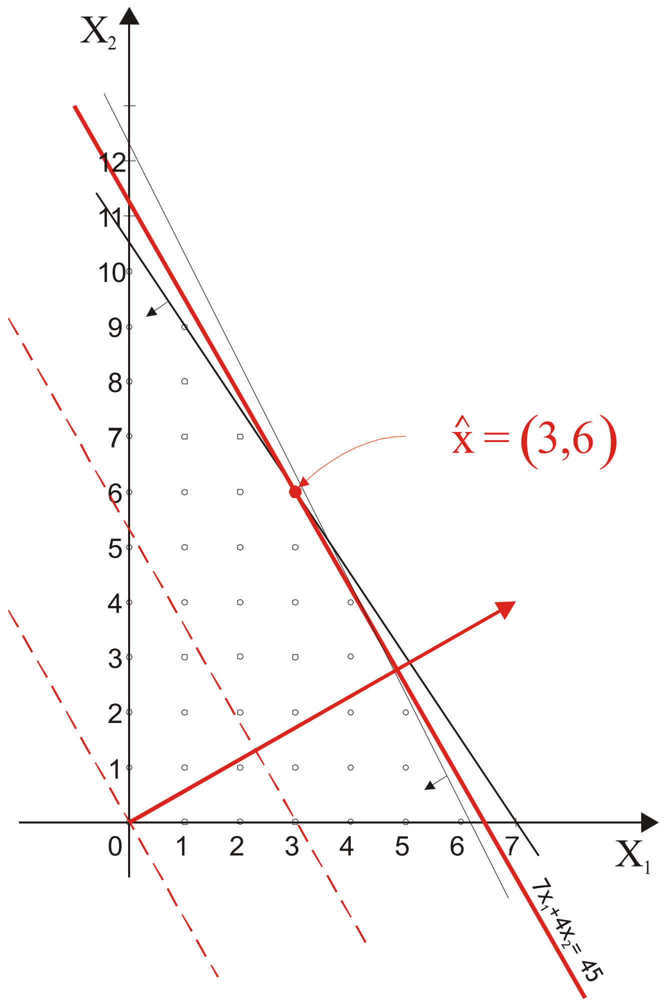
W zadaniu występują dwie zmienne decyzyjne nieujemne całkowitoliczbowe: x_1 – ilość zainstalowanych maszyn typu A, x_2 – ilość zainstalowanych maszyn typu B. Niech x_0 oznacza ilość jednostek (w tys. sztuk) wyprodukowanych przez te maszyny. Zgodnie z treścią zadania poszukujemy decyzji (x_1, x_2), dla której wartość funkcji celu $x_0 = 7x_1 + 4x_2$ będzie największa. Zakres podejmowanych decyzji jest określony przez następujące ograniczenia:

związane z kosztem zakupienia instalacji (w tys. zł): $3x_1 + 2x_2 \le 21$ i związane z rozmieszczeniem instalacji (w m^2): $6x_1 + 3x_2 \le 37$.

Reasumując, modelem matematycznym zadania jest POLC:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{FC:} & x_0 = 7x_1 + 4x_2 \to \max \\ \text{O:} & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 21 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 37 \\ x_1, x_2 \in \{0,1,2,3,\ldots\} \end{cases} \end{array}}.$$

Metoda geometryczna:



Rys. 1.7

Metoda – ALGORYM GOMORY'EGO

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\text{FC:} & x_0 = 7x_1 + 4x_2 \to \max \\
\text{O:} & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 21 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 37 \\ x_1, x_2 \in \{0,1,2,3,\ldots\} \end{cases}
\end{array}
}
$$

$$
\mathrm{T}_0: \quad
\begin{array}{r|c:cc l}
 & 1 & \overset{\uparrow}{-x_1} & -x_2 & \\
\hline
x_0 = & 0 & -7 & -4 & \\
\hdashline
x_3 = & 21 & 3 & 2 & \frac{21}{3} = 7 \\
\leftarrow x_4 = & 37 & \boxed{6} & 3 & \frac{37}{6} = \underline{6\frac{1}{6}}
\end{array}
$$

$$
\mathrm{T}_1: \quad
\begin{array}{r|c:cc l}
 & 1 & -x_4 & \overset{\uparrow}{-x_2} & \\
\hline
x_0 = & \frac{259}{5} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \\
\hdashline
\leftarrow x_3 = & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{5}{2} : \frac{1}{2} = \underline{5} \\
x_4 = & \frac{37}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{37}{6} : \frac{1}{2} = \frac{74}{6}
\end{array}
$$

$$
\hat{\mathrm{T}}^{(\mathrm{POL})}: \quad
\begin{array}{r|c:cc}
 & 1 & \overset{\uparrow}{-x_4} & -x_3 \\
\hline
\text{wiersz źródł.} \quad x_0 = & \frac{137}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\
\hdashline
x_2 = & 5 & -1 & 2 \\
x_1 = & \frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\
\leftarrow s_1 = & -\frac{2}{3} & \boxed{-\frac{2}{3}} & 0
\end{array}
$$

$$
\hat{\mathrm{T}}^{(\mathrm{POLC})}: \quad
\begin{array}{r|c:cc}
 & 1 & -s_1 & -x_3 \\
\hline
x_0 = & 45 & + & + \\
\hdashline
x_2 = & 6 & & \\
x_1 = & 3 & & \\
x_4 = & 1 & &
\end{array}
$$

$$
s_1 = \underbrace{-\tfrac{2}{3}}_{-Fr\left(\frac{137}{3}\right)} + \underbrace{\left(-\tfrac{2}{3}\right)}_{-Fr\left(\frac{2}{3}\right)}\left(-x_4\right) + \underbrace{\left(-0\right)}_{-Fr(1)}\left(-x_3\right) \iff 6x_1 + 3x_2 \le 36
$$

Metoda – AS CLB

T_0:

	1	$\uparrow$ $-x_1$	$-x_2$	
$x_0 =$	0	-7	-4	
$x_3 =$	21	3	2	$\frac{21}{3} = 7$
wiersz źródł. $x_4 =$	37	6	3	$\frac{37}{6} = \underline{6\frac{1}{6}}$
$\leftarrow s_1 =$	6	$\boxed{1}$	0	

$$s_1 = \underbrace{6}_{E\left(\frac{37}{6}\right)} + \Big(\underbrace{1}_{E\left(\frac{6}{6}\right)}\Big)(-x_1) + \Big(\underbrace{0}_{E\left(\frac{3}{6}\right)}\Big)(-x_2) \iff 6 - x_1 \geq 0$$

T_1 :

	1	$-s_1$	$\uparrow$ $-x_2$	
$x_0 =$	42	7	-4	
$x_3 =$	3	-3	2	$\frac{3}{2}$
wiersz źródł. $x_4 =$	1	-6	3	$\underline{\frac{1}{3}}$
$x_1 =$	6	1	0	
$\leftarrow s_2 =$	0	-2	$\boxed{1}$	

$$s_2 = \underbrace{0}_{E\left(\frac{1}{3}\right)} + (\underbrace{-2}_{E\left(\frac{-6}{3}\right)})(-s_1) + (\underbrace{1}_{E\left(\frac{3}{3}\right)})(-x_2) \Leftrightarrow 2\underbrace{s_1}_{6-x_1} - x_2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 \leq 12$$

T_2 :

	1	$\uparrow$ $-s_1$	$-s_2$	
$x_0 =$	42	-1	4	
$\leftarrow x_3 =$	3	$\boxed{1}$	-2	$\frac{3}{1} = \underline{3}$
$x_4 =$	1	0	-3	
$x_1 =$	6	1	0	$\frac{6}{1} = 6$
$x_2 =$	0	-2	1	

$\hat{\mathrm{T}}^{(\mathrm{POLC})}$:

	1	$-x_3$	$-s_2$
$x_0 =$	45	+	+
$x_4 =$	1		
$x_1 =$	3		
$x_2 =$	6		

W interpretacji geometrycznej poruszamy się od punktu początkowego $(0,0)$ (tablica T_0), poprzez punkt $(6,0)$ (tablica T_1) i odrzucenie wierzchołka związanego POL $(6\frac{1}{6},0)$ przez pierwsze odcięcie, a następnie dotarcie do punktu całkowitoliczbowego optymalnego $(3,6)$ dzięki drugiemu odcięciu.

RYS HISTORYCZNY

W roku 1827 matematyk francuski J.B.J. Fourier opublikował metodę rozwiązywania układu nierówności liniowych. Publikacja ta jest zwykle uważana za początek programowania liniowego.

W roku 1939 rosyjski matematyk L.V. Kantorovich sformułował problem przydziału środków jako problem programowania liniowego. Mniej więcej w tym samym okresie duński ekonomista T.C. Koopmans sformułował model programowania liniowego dla pewnych klasycznych zagadnień występujących w ekonomii. W czasie trwania II wojny światowej modele programowania liniowego były stosowane do rozwiązywania problemów związanych z planowaniem wojskowym.

W roku 1947 matematyk amerykański G.B. Dantzig odkrył metodę sympleks. Zbiegło się to z rozwojem komputeryzacji, a zatem z możliwością zastosowania metod programowania liniowego do rozwiązywania problemów występujących w rzeczywistości.

W roku 1975 Kantorovich oraz Koopmans otrzymali za swoje prace nagrodę Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych.

LITERATURA (podstawowa - monografie)

GASS (1958), SIMONNARD (1966), GARFINKEL, NEMHAUSER (1972) – CLB

ZORYCHTA, OGRYCZAK (1981), WALUKIEWICZ (1986)

OPROGRAMOWANIE POL (pakiety ogólnodostępne, komercyjne) – informacje np.
http://www-unix.mes.anl.gov/otc/guide/faq