æ

"MINIAKADEMIA. 09.05.2020."

Przekształcenia pomagają rozwiązać zadanie. Ćwiczenia.

1. Dany jest punkt A i prosta k. Udowodnij, że odcinek AC ma najkrótszą długość dla C leżących na k , gdy AC jest prostopadły do k.
2. Na boku BC czworokąta $ABCD$ znaleźć punkt P taki , aby kąty APB i DPC były równe.
3. Dane są punkty A, B i prosta k. Na prostej k znaleźć punkt C taki, że $AC + CB$ jest najkrótsza.
4. Jak uderzyć bilardową kulę, aby trafiła ona w inną kulę po odbiciu od jednej, dwóch, trzech band stołu ?
5. Udowodnij, że pole wypukłego czworokąta $ABCD$ jest nie większe niż $\frac{1}{2}(AB \cdot AD + BC \cdot CD)$.
6. Udowodnij, że pole wypukłego czworokąta $ABCD$ jest nie większe niż $\frac{1}{2}(AB \cdot BC + AB \cdot CD)$.
7. Skonstruować trójkąt ABC mając AB, kąt CAB i sumę $AC + CB$.
8. Dane są okręgi O, S i prosta k. Skonstruować kwadrat $ABCD$ taki, że A jest na O , C na S a D, B na k.
9. Dany jest kąt ostry ABC i punkt D wewnątrz niego. Na ramionach kąta ABC znaleźć punkty E, F takie, że suma $DE+EF+FD$ jest najmniejsza.
10. Dany jest trójkąt ABC . Na jego ramionach znaleźć punkty X, Y, Z takie, że $XY + YZ + ZX$ jest najmniejsze.
11. Dwaj gracze kładą kolejno na prostokątny stół monety dwuzłotowe. Przegrywa ten, który już nie ma miejsca na swoją monetę. Jak grać, żeby wygrać.
12. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie dwusieczna i środkowa pokrywają się, to trójkąt jest równoramienny.
13. Dany jest kąt ostry i punkt wewnątrz niego. Przez ten punkt poprowadzić prostą odcinającą z kąta trójkąt o najmniejszym polu.
14. Dany jest okrąg, prosta k i punkt. Przez punkt poprowadzić prostą, która przecina okrąg i prostą k w takich punktach A, B , że dany punkt jest środkiem odcinka AB.

15. Okrąg przecina boki AB, AC, BC trójkąta w punktach C_1 i C_2 , B_1 i B_2, A_1 i A_2. Udowodnij, że jeżeli prostopadłe do boków w punktach A_1, B_1, C_1 przecinają się w jednym punkcie, to prostopadłe do boków w punktach A_2, B_2C_2 też.

16. Dane są dwa koncentryczne okręgi. Poprowadź prostą wycinająca 3 równe cięciwy.

17. Dany trójkąt prostokątny ABC o polu 1. (kąt BAC prosty). Obrazami wierzchołków A, B, C w symetrii wzgl@dem prostych BC, CA, AB są odpowiednio punkty $A', B", C"$. Oblicz pole trójkąta $A'B'C'$.

18. Dane są trzy równoległe proste k, l, m . Skonstruuj trójkąt równoboczny ABC o wierzchołkach na tych prostych.

19. Przez środek kwadratu poprowadzono dwie proste prostopadłe. Udowodnij, że punkty ich przecięcia z bokami kwadratu tworzą kwadrat.

20. Dany jest kąt wypukły o wierzchołku P, punkt A wewnątrz niego oraz punkty X, Y na różnych ramionach kąta takie, że XP = PY i suma AX + AY jest minimalna. Udowodnij, że kąty XAP i YAP są równe.

21. Na odcinku AE po jednej stronie narysowano trójkąty równoboczne ABC i CDE . Środki odcinków AD i BE to punkty M i P. Udowodnij, że trójkąt CPM jest równoboczny.

22. Na zewnątrz boków trójkąta ABC zbudowano trójkąty równoboczne ABK, BCL i ACM. Udowodnij , że AL. = BM = CK .

23. Dany jest punkt A oraz okrąg O i prosta k. Skonstruuj trójkąt równoboczny ABC tak, że B leży na O a C na k.

24. Wewnątrz kwadratu ABCD wzięto punkt P. Z A poprowadzono prostopadłą do PB, z B do PC, z C do PD, z D do PA. Udowodnij, że te proste przecinają się w jednym punkcie.

25. Znaleźć wewnątrz trójkąta ABC taki punkt X , że suma $AX + BX + CX$ jest najmniejsza.

26. W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AF, CE . Wiemy, że kąty BCE, FAE są równe $30°$. Udowodnij, że ABC równoboczny.

27. Dwa okręgi o promieniu R są styczne w punkcie K. Na jednym z nich obieramy punkt A , na drugim B tak, e $\angle AKB$ jest prosty. Udowodnij, że $|AB| = 2R$.

28. W trapezie ABCD mamy $BC||AD$. Punkt Mjest punktem przecięcia dwusiecznych kątów $\angle A$ i $\angle B$ a punkt N kątów $\angle C$ i $\angle D$. Udowodnij, że $2MN = |AB + CD - BC - AD|$.

29. Wewntrz równoległoboku $ABCD$ obrano punkt M tak, że $|\angle AMB| + |\angle CMD = \pi$. Udowodnij, że kty $\angle MBC$ i $\angle MDC$ są równe.
Roz. wykład.

30. Czworokąt wypukły podzielony jest przez przekątne na cztery trójkąty. Udowodnij, że piunkty przecięcia ich środkowych tworzą równoległobok $KLMN$..

31. W trapezie $ABCD$, $BC||AD$ przedłużenia AB i CD przecinają się w punkcie K a jego przekątne w punkcie L. Niech M, N środki AD i BC. Udowodnij, że K, L, M, N leżą na jednej prostej.

32. Środkowe $AA', BB", CC"$ w trójkącie ABC przecinają się w punkcie M. Punkt P dowolny. Niech l_A - prosta przez A równoległa do PA', analogicznie l_B, l_C. Udowodnij, że proste l_A, l_B, l_C przecinają się w jednym punkcie Q. Punkt M leży na odcinku PQ i $PM : MQ = 1 : 2$.

33. Okrąg S jest styczny do boków AB, BC trójkąta równoramiennego ABC ($AB = BC$) w punktach P, K i jest styczny do okręgu opisanego S_1 na trójkącie ABC w piunkcie D. Udowodnij, że środek PK jest środkiem kręgu wpisanego w ABC.

34. W trójkącie ABC poprowadzono środkowe $AF4iCE$. Udowodnij, że jeżeli $\angle FAB = \angle ECB = 30°$, to ABC jest równoboczny.

35. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$ taki, że $BCEF$ jest równoległobokiem, a ABF jest trójkątem równobocznym. Poza tym $BC = 1, AD = 3, CD + DE = 2$. Oblicz pole $ABCDEF$.