

- Zadanko 1.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $n^2 + n$ jest parzysta.
- Zadanko 2.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $n^2 + 3n$ jest parzysta.
- Zadanko 3.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n , która nie jest podzielna przez 3, jej kwadrat daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3.
- Zadanko 4.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n jej kwadrat daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4.
- Zadanko 5.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej liczba $n^3 - n$ dzieli się przez 6.
- Zadanko 6.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej liczba $n^3 + 5n$ dzieli się przez 6.
- Zadanko 7.** Udowodnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą podzielną przez 8.
- Zadanko 8.** Udowodnij, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych nie jest podzielna przez 4.
- Zadanko 9.** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej n liczba $3n^2 + 4n + 1$ dzieli się przez 4.
- Zadanko 10.** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.
- Zadanko 11.** Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych dzieli się przez 9.
- Zadanko 12.** Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych parzystych liczb całkowitych dzieli się przez 24.
- Zadanko 13.** Udowodnij, że jeśli $5n$ oraz $2n$ są liczbami całkowitymi, to n jest liczbą całkowitą.
- Zadanko 14.** Udowodnij, że jeśli $5n$ oraz $7n$ są liczbami całkowitymi, to n jest liczbą całkowitą.
- Zadanko 15.** Udowodnij, że jeśli $11n$ oraz $17n$ są liczbami całkowitymi, to n jest liczbą całkowitą.
- Zadanko 16.** Niech m, n będą takimi liczbami całkowitymi, że $m + n$ jest parzyste. Uzasadnij, że $m - n$ jest parzyste.
- Zadanko 17.** Niech m, n będą takimi liczbami całkowitymi, że $m + 4n$ jest podzielne przez 5. Udowodnij, że wtedy $4m + n$ jest podzielne przez 5.
- Zadanko 18.** Niech m, n będą takimi liczbami całkowitymi, że liczba $3m + 2n$ jest podzielna przez 7. Uzasadnij, że liczba $2m - n$ jest również podzielna przez 7.
- Zadanko 19.** Pewna liczba całkowita n daje przy dzieleniu przez 4 resztę 3, a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4. Jaka jest reszta z dzielenia liczby n przez 20?
- Zadanko 20.** Z cyfr 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 tworzymy ośmiocyfrowe liczby o różnych cyfrach. Czy któraś z tych liczb może być kwadratem liczby całkowitej?
- Podpowiedź:** Oblicz sumę cyfr tworzonych liczb.
- Zadanko 21.** Udowodnij, że każda liczba pierwsza większa od 3 jest postaci $6n - 1$ lub $6n + 1$ dla pewnej liczby całkowitej n .
- Zadanko 22.** Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 3. Udowodnij, że liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.
- Zadanko 23.** Niech n będzie liczbą całkowitą nieujemną. Uzasadnij, że żadna z liczb $8n + 3$, $8n + 5$, $8n + 7$ nie może być kwadratem liczby całkowitej.
- Zadanko 24.** Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Uzasadnij, że liczba $n^2 + n + 1$ nie może być kwadratem liczby całkowitej.
- Wskazówka:** Zauważ, że zachodzi nierówność $n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1$.
- Zadanko 25.** Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba postaci $4p + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej.
- Zadanko 26.** Uzasadnij, że równanie $x(x + 1)(x + 2) = 2024^{2025}$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.
- Zadanko 27.** Liczby pierwsze p, q (gdzie $p > q$) nazywamy liczbami **bliźniaczymi**, jeśli $p - q = 2$. Udowodnij, że liczby pierwsze p, q są bliźniacze wtedy i tylko wtedy, gdy $pq + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej.
- Zadanko 28.** Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczby $p + 2$ oraz $p + 4$ są również liczbami pierwszymi.
- Wskazówka.** Zauważ, że liczby pierwsze większe od 3 nie są podzielne przez 3. Co można stąd wywnioskować?
- Zadanko 29.** Uprość ułamki: $\frac{16}{64}, \frac{166}{664}, \frac{1666}{6664}$. Na podstawie zauważonej prawidłowości zapisz odpowiednią hipotezę i udowodnij ją.

Zadanko 30. Oblicz kwadraty liczb

- (a) 3, 33, 333, 3333, (b) 6, 66, 666, 6666, (c) 9, 99, 999, 9999.

Następnie napisz odpowiednią hipotezę jak wygląda kwadrat liczby złożonej z dokładnie n trójek/szóstek/dziewiątek i udowodnij tę hipotezę.

Zadanko 31. Czy wśród liczb postaci

- (a) 11, 111, 1111, ..., (d) 33, 333, 3333, ...,
(b) 44, 444, 4444, ...,
(c) 99, 999, 9999, ..., (e) 77, 777, 7777, ...

znajdują się kwadraty liczb naturalnych?

Wskazówka: (a) zapisz, że te liczby równają się $(2k + 1)^2$ dla pewnej liczby całkowitej k . Znajdź jakąś sprzeczność.

Wskazówka: (d) jakie mogą być ostatnie cyfry kwadratów liczb całkowitych?

Zadanko 32. Udowodnij, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Wskazówka: Załóż, że $\sqrt{2} = m/n$ dla pewnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych m, n . Następnie podnieś równanie do kwadratu i spróbuj znaleźć jakąś sprzeczność.

Zadanko 33. Udowodnij, że poniższe liczby są niewymierne.

- (a) $\sqrt{3}$. (f) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.
(b) $\sqrt{6}$. (g) $w + x$, gdzie w jest wymierna oraz x jest niewymierna.
(c) $\sqrt[3]{2}$.
(d) $\sqrt{p}$, gdzie p jest liczbą pierwszą. (h) $w \cdot x$, gdzie w jest niezerową liczbą wymierną oraz x jest niewymierna.
(e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Zadanko 34. Logarytmem o podstawie $a > 0, a \neq 1$ z liczby $b > 0$ nazywamy taką liczbę c , do której należy podnieść a , żeby otrzymać b . Tę liczbę oznaczamy $\log_a b$.

- (a) Oblicz $\log_2 4, \log_4 8, \log_8 \frac{1}{16}$.
(b) Uzasadnij, że jeśli p, q są różnymi liczbami pierwszymi, to $\log_p q$ jest liczbą niewymierną.

Zadanko 35. Czy jeśli a i b są liczbami niewymiernymi, to czy liczba

- (a) $a + b$ (d) a/b
(b) $a - b$ (e) $\log_a b$
(c) $a \cdot b$ (f) a^b

musi być niewymierna?

Wskazówka do (f): Zauważ, że $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$. Czy jesteś w stanie z tej równości wywnioskować odpowiedź na podpunkt (f)?