

# Zadania dowodowe

sobota, 4 października 2025 14:30

Uzasadnij, że jeśli 'n' jest liczbą całkowitą, to  $n^2+n$  jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie I.

Jeśli n jest parzyste, to  $(n^2)$  też jest parzyste, więc  $n^2+n$ , jako suma dwóch liczb parzystych, też jest parzyste.

Jeśli n jest nieparzyste, to  $(n^2)$  też jest nieparzyste, więc  $n^2+n$ , jako suma dwóch liczb nieparzystych, jest nieparzysta.

Rozwiązanie II.

• Jeśli  $n = 2k$ , gdzie k - całkowite (tzn. n parzyste), bo wtedy  $n^2+n = (2k)^2+2k = 4k^2+2k = 2(2k^2+k)$  parzyste

• Jeśli  $n = 2k+1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , wtedy  $n^2+n = (2k+1)^2+(2k+1) = 4k^2+4k+1+2k+1 = 4k^2+6k+2 = 2(2k^2+3k+1)$  parzyste

Koniec

Rozwiązanie III

Zauważmy, że  $n^2+n = n(n+1)$  to iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych, więc wśród nich jest parzysta liczba, więc iloczyn też jest parzysty.

Zadanie Udowodnij, że jeśli  $n \in \mathbb{Z}$ , to  $n^3-n$  jest podzielne przez 6.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(Rozwiązanie I)

•  $n = 6k, k \in \mathbb{Z}$ :  $n^3-n = (6k)^3-6k = 216k^3-6k = 6(36k^3-k)$  OK

•  $n = 6k+1, k \in \mathbb{Z}$ :  $n^3-n = (6k+1)^3-(6k+1) = 216k^3+108k^2+18k+1-6k-1 = 216k^3+108k^2+12k = 6(36k^3+18k^2+2k)$  OK

•  $n = 6k+2, k \in \mathbb{Z}$ ,  $n^3-n = (6k+2)^3-(6k+2) = \dots = 6 \cdot \square$  OK

•  $n = 6k+3$

•  $n = 6k+4$

•  $n = 6k+5$

KONIEC

(Rozwiązanie II)

$n^3-n$

Wystarczy, że uzasadnimy, że nasza liczba dzieli się przez 2 i dzieli się przez 3.

Prz. 2:  $n = 2k$  ...  
 $n = 2k+1$  ...

Prz. 3:  $n = 3k$  ...  
 $n = 3k+1$  ...  
 $n = 3k+2$  ...

(Rozwiązanie III)

$n = 3k+2$   
(Rozwiązanie III)

Zauważmy, że  $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$

Jest to iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, więc jedna z nich musi dzielić się przez 3, i ta będzie zawsze wśród nich co najmniej jedna podzielna przez 2.  
Zatem  $n^3 - n$  dzieli się przez 6.

Zadanie Uzasadnij, że kwadrat liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3

Rozw.

$$\bullet n = 3k+1, k \in \mathbb{Z} \quad n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + \underbrace{1}_{\text{reszta}}$$

$$\bullet n = 3k+2, k \in \mathbb{Z} \quad n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + \underbrace{1}_{\text{reszta}}$$

Zadanie. Udowodnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych dzieli się przez 8.

$2k+1, 2k+3$  - dwie kolejne liczby nieparzyste

$$\begin{aligned} (2k+3)^2 - (2k+1)^2 &= 4k^2 + 12k + 9 - (4k^2 + 4k + 1) = \\ &= 4k^2 + 12k + 9 - 4k^2 - 4k - 1 = \\ &= 8k + 8 = \underline{8(k+1)} \quad \text{o.k.} \end{aligned}$$

Zadanie

**Zadanko 13.** Udowodnij, że jeśli  $5n$  oraz  $2n$  są liczbami całkowitymi, to  $n$  jest liczbą całkowitą.

Zauważmy, że, mając dwie liczby całkowite, możemy je do siebie dodać/odjąć/pomnożyć i wynik musi pozostać nadal liczbą całkowitą.

Wiemy że  $2 \cdot (2n) = 4n$  jest całkowite.

Zatem  $5n - 4n = n$  jest całkowite.

**Zadanko 15.** Udowodnij, że jeśli  $11n$  oraz  $17n$  są liczbami całkowitymi, to  $n$  jest liczbą całkowitą.

Zauważmy, że, mając dwie liczby całkowite, możemy je do siebie dodać/odjąć/pomnożyć i wynik musi pozostać nadal liczbą całkowitą.

*Szukajmy...*

Zauważmy, że, mając dwie liczby całkowite, możemy je do siebie dodać/odjąć/pomnożyć i wynik musi pozostać nadal liczbą całkowitą.

Sg całkowite:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 17n &= 34n \\ 2 \cdot 11n &= 22n \\ 17n - 11n &= 6n \\ 17n + 11n &= 28n \\ 11n - 6n &= 5n \\ 2 \cdot 5n &= 10n \\ 11n - 10n &= n \end{aligned}$$

Szybciej:

$$(2 \cdot 17n) - (3 \cdot 11n) = n$$

**Zadanko 16.** Niech  $m, n$  będą takimi liczbami całkowitymi, że  $m+n$  jest parzyste. Uzasadnij, że  $m-n$  jest parzyste.

Rozwiązanie (I)

Rozważamy przypadki: gdy obie parzyste, to suma parzysta i wtedy różnica parzysta, OK

Gdy obie parzyste, to suma parzysta i wtedy różnica parzysta, OK

Gdy jedna parzysta i jedna nieparzysta, to wtedy suma nieparzysta, więc nie ma po co tego rozważać.

We wszystkich możliwych przypadkach jest OK. Koniec.

Rozwiązanie (II)

Zauważmy, że  $m-n = \underbrace{(m+n)}_{\text{par.}} - \underbrace{2n}_{\text{par.}}$

**Zadanko 17.** Niech  $m, n$  będą takimi liczbami całkowitymi, że  $m+4n$  jest podzielne przez 5. Udowodnij, że wtedy  $4m+n$  jest podzielne przez 5.

W stylu rozumowania (II) z poprzedniego zadania:

$$\begin{aligned} (4m+n) + (m+4n) &= 5m+5n \\ (4m+n) &= \underbrace{(5m+5n)}_{\text{podzielne przez 5}} - \underbrace{(m+4n)}_{\text{podzielne}} \end{aligned}$$

**Zadanko 20.** Z cyfr 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 tworzymy ośmiocyfrowe liczby o różnych cyfrach. Czy któraś z tych liczb może być kwadratem liczby całkowitej?

**Podpowiedź:** Oblicz sumę cyfr tworzonych liczb.

np.  $\begin{matrix} 34567890 \\ 90345678 \\ \hline \end{matrix}$

Suma cyfr każdej z tych liczb to: 42.

Zatem każda z tych liczb dzieli się przez 3, ale nie dzieli się przez 9. A tak nie może być dla kwadratu, więc

odpowiedź to: żadna.

[Cecha podzielności przez 3/9: liczba dzieli się przez 3/9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr danej liczby dzieli się przez odpowiednio 3/9.]

**Zadanko 24.** Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Uzasadnij, że liczba  $n^2 + n + 1$  nie może być kwadratem liczby całkowitej.

**Wskazówka:** Zauważ, że zachodzi nierówność  $n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1$ .

$\sqrt{n^2 + 8}$

$\sqrt{n^2 + n + 1} < \sqrt{n^2 + 2n + 1} = (n+1)^2$

$$\begin{array}{l} n^2 + 8 \\ n=1: \end{array}$$

dwa kolejne

kwadraty

$(n+1)^2$

nie da się zmieścić kwadratu między dwoma kolejnymi kwadratami, więc  $n^2 + n + 1$  NIE jest kwadratem

**Zadanko 26.** Uzasadnij, że równanie  $x(x+1)(x+2) = 2024^{2025}$  nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

ilość trzech kolejnych  
liczb całkowitych, więc  
to wyrażenie dzieli się przez 3

A po prawej stronie 2024 nie dzieli się przez 3,  
więc  $2024^{2025}$  nie dzieli się przez 3

Więc równanie nigdy nie będzie spełnione

**Zadanko 29.** Uprość ułamki:  $\frac{16}{64}, \frac{166}{664}, \frac{1666}{6664}$ . Na podstawie zauważonej prawidłowości zapisz odpowiednią hipotezę i udowodnij ją.

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{166}{664} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1666}{6664} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{166666}{666664} = \frac{1}{4}$$

ogólnie

$$\frac{1\underbrace{6\dots6}_n}{\underbrace{6\dots6}_n4} = \frac{1}{4}$$

Dowód:

$$\begin{array}{r} 1 \overset{2}{6} \overset{2}{6} \overset{2}{6} \dots \overset{2}{6} \overset{2}{6} 6 \\ \times \phantom{1 \overset{2}{6} \overset{2}{6} \overset{2}{6} \dots \overset{2}{6} \overset{2}{6}} 4 \\ \hline 6666 \dots 664 \end{array}$$

(zwykłe mnożenie pisemne).