WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WARSAW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Zadziwiająca matematyka

Łagodne oderwanie się od codzienności matematyki

dr inż. Michał Zwierzyński

Projekt Mathfigs

MATHFIGS

- Popularyzacja matematyki oraz innych nauk ścisłych przy pomocy poklatkowej animacji klocków LEGO.
- Youtube/Facebook: MATHFIGS

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Powszechny Internetowy Konkurs dla Uczniów Szkół Średnich - Matematyka

zorganizowany przez wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych PW

www.konkurs.mini.pw.edu.pl

- Obecnie trwa konkurs
- Multikonta (nauka przez praktykę), feedback
- Etapy internetowe, zadania zamknięte i otwarte
- Półfinały w wielu miejscach w Polsce / online
- Finał na Politechnice

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Powszechny Internetowy Konkurs dla Uczniów Szkół Średnich - Matematyka

zorganizowany przez wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych PW

www.konkurs.mini.pw.edu.pl

- Nagrody:
  - Indeksy na wydział MiNI PW, inne wydziały PW oraz PG dla laureatów
  - Maksymalna liczba punktów z matematyki w postępowaniu rekrutacyjnym dla laureatów i wyróżnionych
  - Stypendium Fundacji Rodziny Maciejko
  - Sprzęt komputerowy ufundowany przez Rektora PW dla zwycięzcy i nauczyciela zwycięzcy
  - Kalkulatory, książki, …

WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

Miasta szkół uczestników XXV edycji

WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

MIASTA SZKÓŁ FINALISTÓW XXII EDYCJI

MiNI Akademia Matematyki

- Wykłady wraz z warsztatami odbywające się na wydziale MiNI PW
- Mniej więcej raz na miesiąc w soboty
- www.akademia.mini.pw.edu.pl

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Spis treści

- Przeludnienie Ziemi.
- Lina i Ziemia.
- Córki.
- Teleturniej.
- Karta papieru.
- Walec i wstęga.

Spis treści

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Przeludnienie Ziemi

- Wyobraźmy sobie, że każdemu żyjącemu człowiekowi na Ziemi dajemy 1 metr kwadratowy powierzchni.
- Czy Ci wszyscy ludzie zmieszczą się na terenie województwa mazowieckiego?

Przeludnienie Ziemi

- Wykonajmy jednak parę obliczeń:

Przeludnienie Ziemi

- Wykonajmy jednak parę obliczeń:
  - Powierzchnia woj. mazowieckiego:

Przeludnienie Ziemi

- Wykonajmy jednak parę obliczeń:
  - Powierzchnia woj. mazowieckiego:
    - 35 558,47 km2

Przeludnienie Ziemi

- Wykonajmy jednak parę obliczeń:
  - Powierzchnia woj. mazowieckiego:
    - 35 558,47 km2
    - 35 558 470 000 m2
-

Przeludnienie Ziemi

- Wykonajmy jednak parę obliczeń:
  - Powierzchnia woj. mazowieckiego:
    - 35 558,47 km2
    - 35 558 470 000 m2
- Czyli bez problemu by się zmieścili ☺

Spis treści

- Przeludnienie Ziemi.
- Lina i Ziemia.
- Córki.
- Teleturniej.
- Karta papieru.
- Walec i wstęga.

Lina i Ziemia.

- Obwód Ziemi wynosi około 40 000 km.
- Załóżmy, że dookoła Ziemi rozwinęliśmy linkę (czyli ta linka ma długość 40 000 km).

wikipedia.com

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Lina i Ziemia.

- Teraz tę linę przecinamy w jednym miejscu i doczepiamy do niej **1 metr**, więc w sumie nasza lina ma teraz

  40 000 km + 1m = **40 000 001 m** długości.

- Teraz linkę rozciągamy równomiernie na powierzchni Ziemi.

Lina i Ziemia.

Lina i Ziemia.

- Czy pomiędzy linką a Ziemią zmieściłaby się mysz?
- Przyjmijmy, że „wzrost” myszy wynosi 4cm.

wikipedia.com

Lina i Ziemia.

- Czy pomiędzy linką a Ziemią zmieściłby się kot?
- Przyjmijmy, że „wzrost” kota wynosi 15cm.

Lina i Ziemia.

- Niech
  - R_Z oznacza promień Ziemi
  - x oznacza szukaną odległość

-
-

Lina i Ziemia.

- Niech
  - R_Z oznacza promień Ziemi
  - x oznacza szukaną odległość
- Wtedy długość linki wynosi $2\pi R_Z + 1$ [m].
-

Lina i Ziemia.

- Niech
  - R_Z oznacza promień Ziemi
  - x oznacza szukaną odległość
- Wtedy długość linki wynosi $2\pi R_Z + 1$ [m].
- Linka tworzy w przestrzeni okrąg, promień tego okręgu wynosi $R_Z + x$, więc z drugiej strony długość linki jest równa długości okręgu o promieniu $R_Z + x$, czyli $2\pi(R_Z + x)$

Lina i Ziemia.

- Możemy zapisać równości:

$$2\pi R_Z + 1 = 2\pi(R_Z + x)$$

-

Lina i Ziemia.

- Możemy zapisać równości:

$$2\pi R_Z + 1 = 2\pi(R_Z + x)$$
$$2\pi R_Z + 1 = 2\pi R_Z + 2\pi x$$

-

Lina i Ziemia.

- Możemy zapisać równości:

$$2\pi R_Z + 1 = 2\pi(R_Z + x)$$

$$2\pi R_Z + 1 = 2\pi R_Z + 2\pi x$$

$$2\pi x = 1$$

Lina i Ziemia.

- Możemy zapisać równości:

$$2\pi R_Z + 1 = 2\pi(R_Z + x)$$

$$2\pi R_Z + 1 = 2\pi R_Z + 2\pi x$$

$$2\pi x = 1$$

$$x = \frac{1}{2\pi}$$

-

Lina i Ziemia.

- Możemy zapisać równości:

$$2\pi R_Z + 1 = 2\pi(R_Z + x)$$
$$2\pi R_Z + 1 = 2\pi R_Z + 2\pi x$$
$$2\pi x = 1$$
$$x = \frac{1}{2\pi} \approx 0.16\ [m] \approx 16\ [cm]$$

- I jak odpowiadaliście? ☺

Lina i Ziemia.

- Warto również zauważyć, że podana odległość nie zależy od promienia R_Z, ponieważ wyrażenie z tą składową się skróciło, więc jeżeli dany eksperyment zrobilibyśmy czy to dla Ziemi, czy dla np. pomarańczy, zawsze otrzymujemy taką samą odległość pomiędzy powierzchnią kuli a linką…

wikipedia.com

wikipedia.com

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Spis treści

- Przeludnienie Ziemi.
- Lina i Ziemia.
- Córki.
- Teleturniej.
- Karta papieru.
- Walec i wstęga.

Córki

- Wiemy, że nasz daleki krewniak ma dokładnie dwoje dzieci. Pamiętamy też, że jedno z dzieci jest dziewczynką. Jaka jest szansa, że ten krewniak ma dwie córki?

(A) 50%?

(B) ok. 33%?

(C) ok. 67%?

WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

Paradoks sióstr

- Wszystkie, jednakowo prawdopodobne, możliwości posiadania dwojga dzieci są następujące:

C C **C S** **S C**

S S

S – syn, C – córka (Po lewej stronie jest starsze dziecko, po prawej młodsze)

Paradoks sióstr

C	C		C	S		S	C

S – syn, C – córka
(Po lewej stronie jest starsze dziecko, po prawej młodsze)

Paradoks sióstr

C	C		C	S		S	C

S – syn, C – córka
(Po lewej stronie jest starsze dziecko, po prawej młodsze)

- Wiemy, że nasz krewniak ma na pewno co najmniej jedną córkę. Widzimy więc, że szansa na to, że krewniak ma dwie córki jest dwa razy mniejsza od szansy na to, że ma córkę oraz syna.
-

Paradoks sióstr

C	C		C	S		S	C

S – syn, C – córka
(Po lewej stronie jest starsze dziecko, po prawej młodsze)

- Wiemy, że nasz krewniak ma na pewno co najmniej jedną córkę. Widzimy więc, że szansa na to, że krewniak ma dwie córki jest dwa razy mniejsza od szansy na to, że ma córkę oraz syna.

- Poprawną była więc odpowiedź (B) ok. 33%!

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Córki

- Wiemy, że nasz daleki krewniak ma dokładnie dwoje dzieci. Pamiętamy też, że **Ania** jest jego starszą córką. Jaka jest szansa, że ten krewniak ma dwie córki?

(A) 50%?

(B) ok. 33%?

(C) ok. 67%?

Paradoks sióstr 2

- Wszystkie, jednakowo prawdopodobne, możliwości posiadania dwojga dzieci są następujące:
-

Paradoks sióstr 2

- Wszystkie, jednakowo prawdopodobne, możliwości posiadania dwojga dzieci są następujące:

Ania	C		Ania	S

S – syn, C – córka (Po lewej stronie jest starsze dziecko, po prawej młodsze)

-

Paradoks sióstr 2

- Wszystkie, jednakowo prawdopodobne, możliwości posiadania dwojga dzieci są następujące:

Ania	C		Ania	S

S – syn, C – córka (Po lewej stronie jest starsze dziecko, po prawej młodsze)

- Tym razem szansa jest taka jaka „powinna być” ☺

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

SPIS TREŚCI

Teleturniej.

- Znany jest bardziej pod nazwą paradoksu Monty Halla, od prezentera w teleturnieju „Let’s make a deal” emitowanego w USA.
- Polskim odpowiednikiem był teleturniej „Idź na całość”, prowadzony przez Zygmunta Chajzera.

Teleturniej.

- Zasady gry są następujące:
  - Mamy trzy bramki A, B, C.
  - Za jedną jest wygrana (samochód), za dwiema pozostałymi nie ma nic szczególnego (w polskiej edycji maskotka kota w worku – Zonka)

Teleturniej.

- Wybieramy jedną bramkę, dajmy na to bramkę A.
- Prowadzący wtedy otwiera jedną z pozostałych bramek, np. C, pokazując, że za nią jest Zonk, pyta nas się teraz:
  - Czy pozostajesz przy wybranej swojej bramce, czy może chcesz zmienić bramkę na bramkę B?

WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

Teleturniej.

- Co powinniśmy zrobić, by jak najbardziej zwiększyć szansę na wygraną?
  - Pozostać przy wybranej bramce? (I)
  - Zmienić na inną bramkę? (II)
  - Nie ma to żadnego znaczenia.

Teleturniej.

- Rozpiszemy wszystkie możliwe sytuacje.

Teleturniej.

Bramka A	Bramka B	Bramka C	Co jeśli pozostaliśmy przy bramce A	Co jeśli zmieniliśmy bramkę.
Samochód	Zonk	Zonk		

Teleturniej.

Bramka A	Bramka B	Bramka C	Co jeśli pozostaliśmy przy bramce A	Co jeśli zmieniliśmy bramkę.
Samochód	Zonk	Zonk	**Samochód**	Zonk

Teleturniej.

Bramka A	Bramka B	Bramka C	Co jeśli pozostaliśmy przy bramce A	Co jeśli zmieniliśmy bramkę.
Samochód	Zonk	Zonk	**Samochód**	Zonk
Zonk	Samochód	Zonk		

Teleturniej.

Bramka A	Bramka B	Bramka C	Co jeśli pozostaliśmy przy bramce A	Co jeśli zmieniliśmy bramkę.
Samochód	Zonk	Zonk	**Samochód**	Zonk
Zonk	Samochód	Zonk	Zonk	**Samochód**

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Teleturniej.

Bramka A	Bramka B	Bramka C	Co jeśli pozostaliśmy przy bramce A	Co jeśli zmieniliśmy bramkę.
Samochód	Zonk	Zonk	**Samochód**	Zonk
Zonk	Samochód	Zonk	Zonk	**Samochód**
Zonk	Zonk	Samochód		

Teleturniej.

Bramka A	Bramka B	Bramka C	Co jeśli pozostaliśmy przy bramce A	Co jeśli zmieniliśmy bramkę.
Samochód	Zonk	Zonk	**Samochód**	Zonk
Zonk	Samochód	Zonk	Zonk	**Samochód**
Zonk	Zonk	Samochód	Zonk	**Samochód**

Teleturniej.

Bramka A	Bramka B	Bramka C	Co jeśli pozostaliśmy przy bramce A	Co jeśli zmieniliśmy bramkę.
Samochód	Zonk	Zonk	**Samochód**	Zonk
Zonk	Samochód	Zonk	Zonk	**Samochód**
Zonk	Zonk	Samochód	Zonk	**Samochód**

Jeżeli będziemy za każdym razem zmieniać wygramy w 2 razach na 3, więc szansa na wygraną wyniesie ok. 66%!

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Spis treści

- Przeludnienie Ziemi.
- Lina i Ziemia.
- Córki.
- Teleturniej.
- Karta papieru.
- Walec i wstęga.

Paradoks kartki papieru

- Czy uda się zgiąć kartkę papieru aż 51 razy?

  (za każdym razem zginamy na pół)

WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

Paradoks kartki papieru

- Gratuluję! Oczywiście się nam nie uda.
- Zastanówmy się jednak, jak wysoka musiałaby być wieża, gdyby nam się udało zgiąć kartkę 51 razy.

(A) ok. 5cm
(B) ok. 10cm
(C) ok. 10m
(D) ok. 1000km
(E) ok. 100 000km
(F) więcej niż 1 000 000 km?

Paradoks kartki papieru

- Pojedyncza kartka papieru do xero $0.08\,mm$.
- Gdy złożymy ją raz będą dwie warstwy, czyli jej grubość zwiększy się do $0.08 \cdot 2 = 0.16\,mm$.
- Gdy złożymy jeszcze raz, będą 4 warstwy, czyli grubość będzie wynosiła $0.08 \cdot 4 = 0.32\,mm$.



Paradoks kartki papieru

- Przy trzech złożeniach będzie $8 = 2^3$ warstw, za każdym kolejnym razem zwiększamy grubość dwukrotnie.
- Podsumowując, przy n złożeniach będziemy mieli 2^n warstw, czyli grubość złożonej kartki będzie wynosiła

$$0.08 \cdot 2^n\, mm.$$

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Paradoks kartki papieru

- Przy 51 złożeniach otrzymamy:

$$0.08 \cdot 2^{51}\, mm =$$
$$= 0.08 \cdot 2251799813685248\, mm =$$
$$= 180143985094819.84\, mm =$$
$$= 180143985094.81984\, m =$$
$$= 180143985.09481984\, km \approx$$
$$\approx 180\, mln\ km$$

- Warto zauważyć, że średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi ok. 150 $mln\ km$.

Paradoks kartki papieru

- Przy 51 złożeniach otrzymamy:

$$0.08 \cdot 2^{51}\, mm =$$
$$= 0.08 \cdot 2251799813685248\, mm =$$
$$= 180143985094819.84\, mm =$$
$$= 180143985094.81984\, m =$$
$$= 180143985.09481984\, km \approx$$
$$\approx 180\, mln\ km$$

- Warto zauważyć, że średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi ok. 150 $mln\ km$.

Paradoks kartki papieru

- Przy 51 złożeniach otrzymamy:

$$0.08 \cdot 2^{51}\, mm =$$
$$= 0.08 \cdot 2251799813685248\, mm =$$
$$= 180143985094819.84\, mm =$$
$$= 180143985094.81984\, m =$$
$$= 180143985.09481984\, km \approx$$
$$\approx 180\, mln\ km$$

- Warto zauważyć, że średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi ok. 150 $mln\ km$.

Paradoks kartki papieru

- Przy 51 złożeniach otrzymamy:

$$0.08 \cdot 2^{51}\,mm =$$
$$= 0.08 \cdot 2251799813685248\,mm =$$
$$= 180143985094819.84\,mm =$$
$$= 180143985094.81984\,m =$$
$$= 180143985.09481984\,km \approx$$
$$\approx 180\,mln\,km$$

- Warto zauważyć, że średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi ok. 150 $mln\,km$.

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Paradoks kartki papieru

- Przy 51 złożeniach otrzymamy:

$$0.08 \cdot 2^{51}\, mm =$$
$$= 0.08 \cdot 2251799813685248\, mm =$$
$$= 180143985094819.84\, mm =$$
$$= 180143985094.81984\, m =$$
$$= 180143985.09481984\, km \approx$$

- Warto zauważyć, że średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi ok. 150 *mln km*.

Paradoks kartki papieru

- Przy 51 złożeniach otrzymamy:

$$
\begin{gathered}
0.08 \cdot 2^{51}\, mm = \\
= 0.08 \cdot 2251799813685248\, mm = \\
= 180143985094819.84\, mm = \\
= 180143985094.81984\, m = \\
= 180143985.09481984\, km \approx \\
\approx 180\, mln\ km
\end{gathered}
$$

- Warto zauważyć, że średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi ok. 150 *mln km*.

Paradoks kartki papieru

- Przy 51 złożeniach otrzymamy:

$$0.08 \cdot 2^{51}\, mm =$$
$$= 0.08 \cdot 2251799813685248\, mm =$$
$$= 180143985094819.84\, mm =$$
$$= 180143985094.81984\, m =$$
$$= 180143985.09481984\, km \approx$$
$$\approx 180\, mln\, km$$

- Warto zauważyć, że średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi ok. $\boldsymbol{150\, mln\, km}$.

odkrywcy.pl

Silnia

- Przez n!, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, rozumiemy iloczyn kolejnych liczb całkowitych dodatnich od 1 aż do n.

Silnia

- Przez n!, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, rozumiemy iloczyn kolejnych liczb całkowitych dodatnich od 1 aż do n. Na przykład

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Silnia

- Przez n!, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, rozumiemy iloczyn kolejnych liczb całkowitych dodatnich od 1 aż do n. Na przykład
$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$
- Mając 4 różne karty, ile jest możliwości ich „potasowania”?

Silnia

- Przez n!, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, rozumiemy iloczyn kolejnych liczb całkowitych dodatnich od 1 aż do n. Na przykład
$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$
- Mając 4 różne karty, ile jest możliwości ich „potasowania”?
    - Dokładnie 4!=24.

Silnia

- Przez n!, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, rozumiemy iloczyn kolejnych liczb całkowitych dodatnich od 1 aż do n. Na przykład
$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$
- Mając 4 różne karty, ile jest możliwości ich „potasowania”?
  - Dokładnie 4!=24.
- Ile jest możliwości potasowania standardowej, 52-kartowej, talii kart?

52!

- Ile to jest?

52!

- Ile to jest?
  $52!$
  $= 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000$
  $\approx 8{,}06 \cdot 10^{67}$.

52!

- Ile to jest?
  $52!$
  $= 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000$
  $\approx 8{,}06 \cdot 10^{67}$.
- Odległość Ziemi od Słońca $149\,600\,000\ km$.

52!

- Ile to jest?
  $52!$
  $= 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000$
  $\approx 8{,}06 \cdot 10^{67}$.
- Odległość Ziemi od Słońca $149\,600\,000\ km$.
- Szerokość Wszechświata $8{,}8 \cdot 10^{26}\ m$.

52!

- Ile to jest?
  $52!$
  $= 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000$
  $\approx 8{,}06 \cdot 10^{67}$.
- Odległość Ziemi od Słońca $149\,600\,000\ km$.
- Szerokość Wszechświata $8{,}8 \cdot 10^{26}\ m$.
- Ile lat zajęłoby ułożenie wszystkich możliwych talii, przy założeniu, że każdy z 300 ludzi układa jeden układ w ciągu 1 sekundy?

52!

- Ile to jest?
  $52!$
  $= 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000$
  $\approx 8{,}06 \cdot 10^{67}$.
- Odległość Ziemi od Słońca $149\,600\,000\ km$.
- Szerokość Wszechświata $8{,}8 \cdot 10^{26}\ m$.
- Ile lat zajęłoby ułożenie wszystkich możliwych talii, przy założeniu, że każdy z 300 ludzi układa jeden układ w ciągu 1 sekundy?
  $\approx 8\,525\,513\,188\,202\,253\,358\,242\,499\,244\,926\,831\,449\,273\,793\,489\,016\,074\,520\,547\ lat$
  $\approx 8.5 \cdot 10^{57}\ lat$.

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

52!

- Ile to jest?
  $52! = 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000 \approx 8{,}06 \cdot 10^{67}.$
- Odległość Ziemi od Słońca $149\,600\,000\ km$.
- Szerokość Wszechświata $8{,}8 \cdot 10^{26}\ m$.
- Ile lat zajęłoby ułożenie wszystkich możliwych talii, przy założeniu, że każdy z 300 ludzi układa jeden układ w ciągu 1 sekundy?
  $\approx 8\,525\,513\,188\,202\,253\,358\,242\,499\,244\,926\,831\,449\,273\,793\,489\,016\,074\,520\,547\ lat$
  $\approx 8.5 \cdot 10^{57}\ lat.$
- A jakbyśmy mieli wszystkich ludzi na świecie (ok. 7 000 000 000) i każdy by układał jedną talię w ciągu 1 milisekundy?

52!

- Ile to jest?
  $52!$
  $= 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000$
  $\approx 8{,}06 \cdot 10^{67}$.
- Odległość Ziemi od Słońca 149 600 000 km.
- Szerokość Wszechświata $8{,}8 \cdot 10^{26}$ m.
- Ile lat zajęłoby ułożenie wszystkich możliwych talii, przy założeniu, że każdy z 300 ludzi układa jeden układ w ciągu 1 sekundy?
  $\approx 8\,525\,513\,188\,202\,253\,358\,242\,499\,244\,926\,831\,449\,273\,793\,489\,016\,074\,520\,547\ lat$
  $\approx 8.5 \cdot 10^{57}\ lat$.
- A jakbyśmy mieli wszystkich ludzi na świecie (ok. 7 000 000 000) i każdy by układał jedną talię w ciągu 1 milisekundy?
  $\approx 365\,379\,136\,637\,239\,429\,638\,964\,253\,354\,007\,062\,111\,734\,006\,672\ lat$
  $\approx 3.6 \cdot 10^{47}\ lat$.

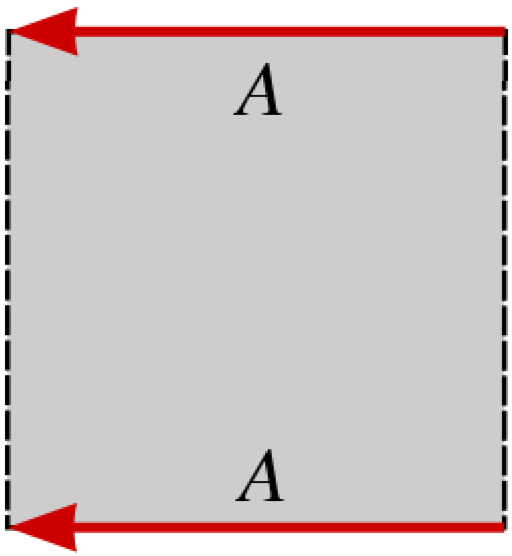
WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

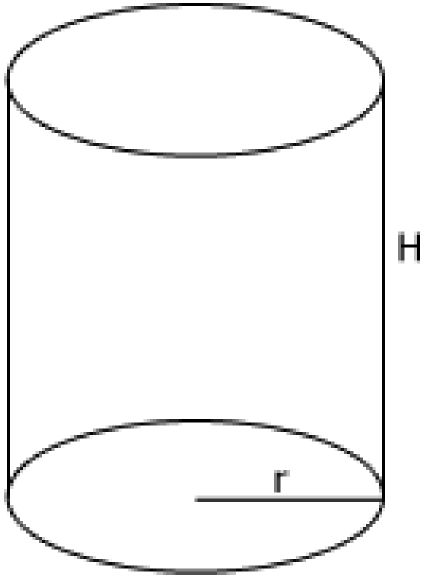
Spis treści

- Przeludnienie Ziemi.
- Lina i Ziemia.
- Córki.
- Teleturniej.
- Karta papieru.
- Walec i wstęga.

Walec i wstęga.

- Jeden pasek papieru sklejamy tak, by powstał walec (sklejamy jego przeciwległe krawędzie)

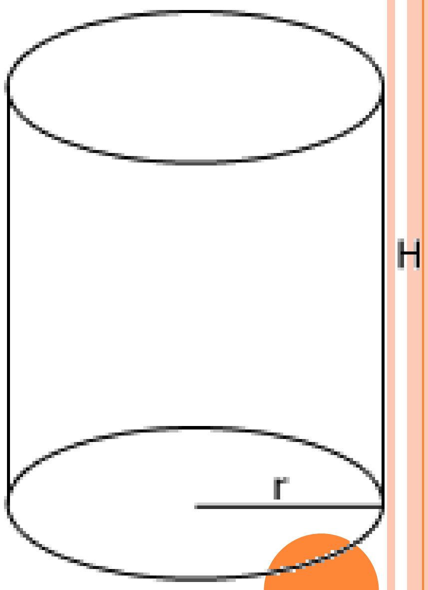




WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

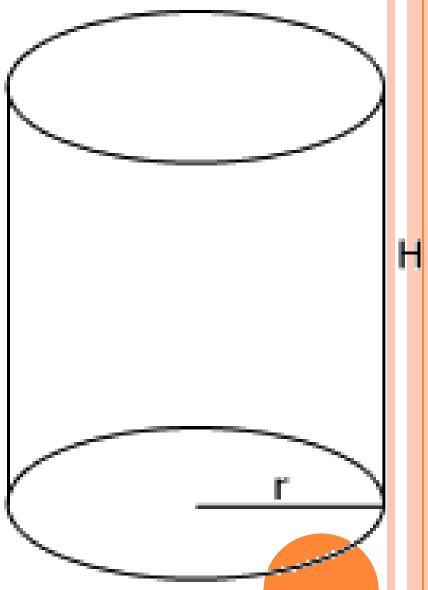
Walec i wstęga.

- Ile stron ma powstały walec oraz ile ma krawędzi?
  - (A) Jedną stronę, jedną krawędź.
  - (B) Jedną stronę, dwie krawędzie.
  - (C) Dwie strony, jedną krawędź.
  - (D) Dwie strony, dwie krawędzie.



Walec i wstęga.

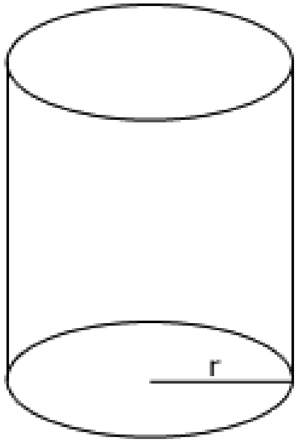
- Ile stron ma powstały walec oraz ile ma krawędzi?
  - (A) Jedną stronę, jedną krawędź.
  - (B) Jedną stronę, dwie krawędzie.
  - (C) Dwie strony, jedną krawędź.
  - (D) <u>Dwie strony, dwie krawędzie.</u>



Walec i wstęga.

- Ile stron ma powstały walec oraz ile ma krawędzi?

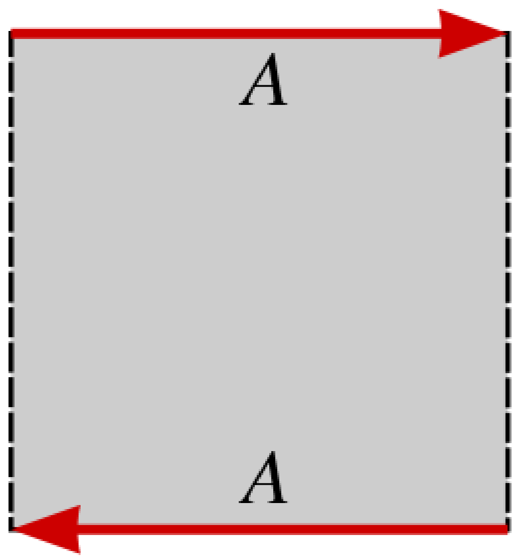
  (D) Dwie strony, dwie krawędzie.

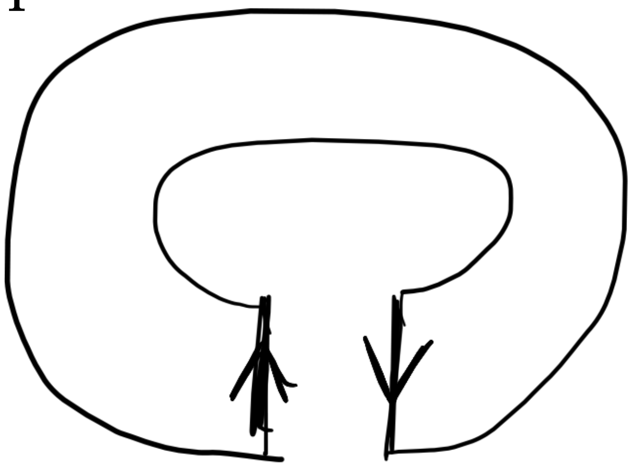


- Jak ktoś nie dowierza, to zawsze może wziąć flamaster i pomalować jego dwie strony na dwa różne kolory, tak samo zrobić z krawędziami ☺

Walec i wstęga. Powstanie wstęgi.

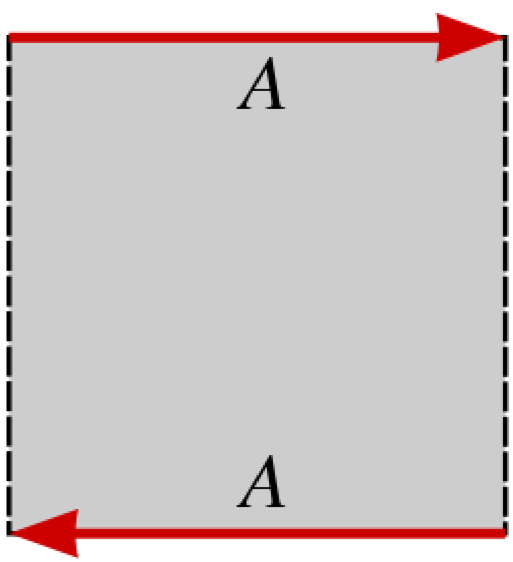
- Tym razem sklejmy dwie przeciwległe krawędzie paska papieru, lecz przekręcając przed sklejaniem jedną krawędź o 180 stopni.





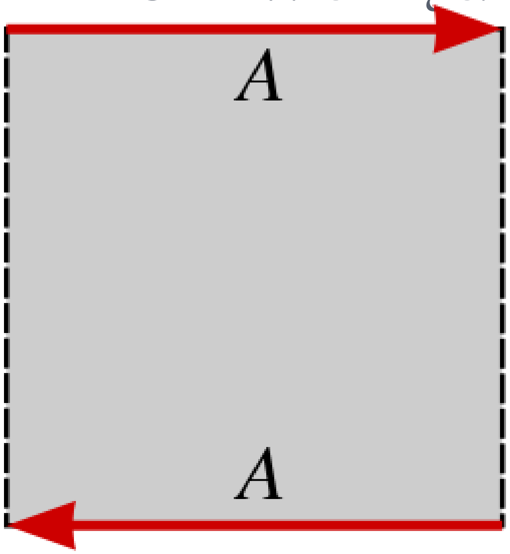
Walec i wstęga. Powstanie wstęgi

- Tym razem sklejmy dwie przeciwległe krawędzie paska papieru, lecz przekręcając przed sklejaniem jedną krawędź o 180 stopni.



wikipedia.com

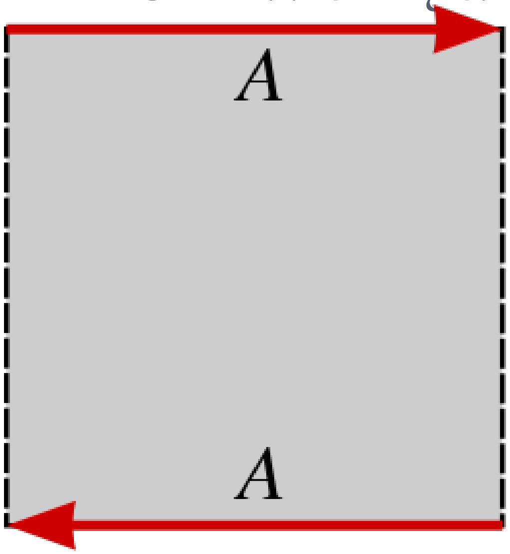
Walec i wstęga. Powstanie wstęgi.



wikipedia.com

- Tę powierzchnię w matematyce nazywamy wstęgą **Möbiusa**.

WALEC I WSTĘGA.

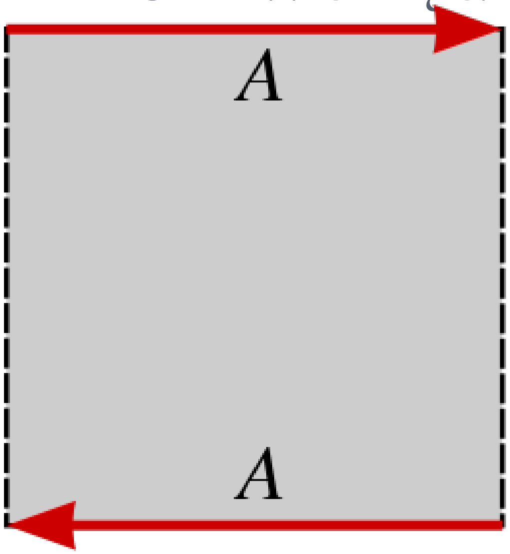


wikipedia.com

- Ile stron ma wstęga Möbiusa?
  - (A) jedną
  - (B) dwie
  - (C) trzy
  - (D) cztery

WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

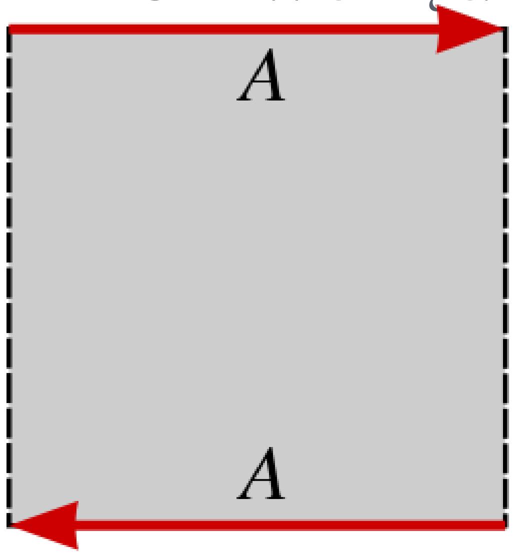
WALEC I WSTĘGA.



wikipedia.com

By sprawdzić empirycznie, zacznijmy malować powierzchnię wstęgi, zaczynając od zlepionej części, i malujmy (NIE ODRYWAJĄC mazaka) w jedną stronę. Po chwili okaże się,

Walec i wstęga.

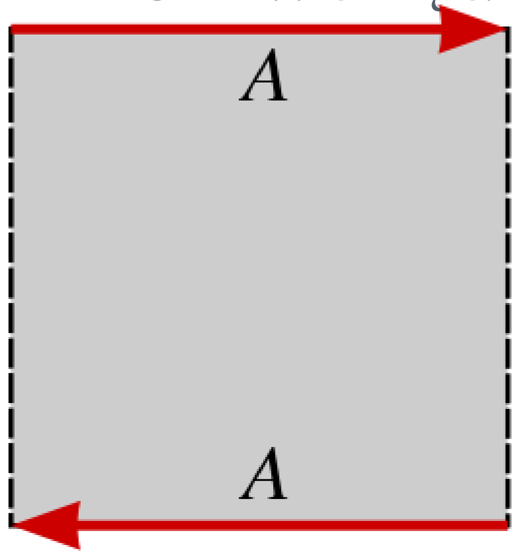


wikipedia.com

By sprawdzić empirycznie, zacznijmy malować powierzchnię wstęgi, zaczynając od zlepionej części, i malujmy (NIE ODRYWAJĄC mazaka) w jedną stronę. Po chwili okaże się, że wróciliśmy do punktu startowego – czyli ta wstęga ma tylko i wyłącznie jedną stronę!

WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

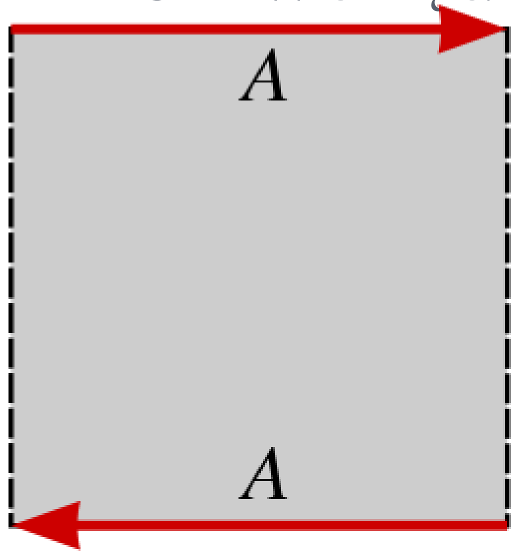
Walec i wstęga.



wikipedia.com

- Ile stron ma wstęga Möbiusa?
  - (A) jedną
  - (B) dwie
  - (C) trzy
  - (D) cztery

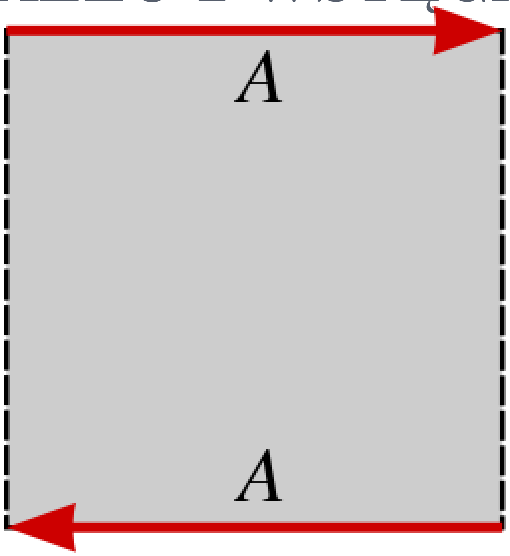
Walec i wstęga.



wikipedia.com

- Ile krawędzi ma wstęga Möbiusa?
  - (A) jedną
  - (B) dwie
  - (C) trzy
  - (D) cztery

WALEC I WSTĘGA.

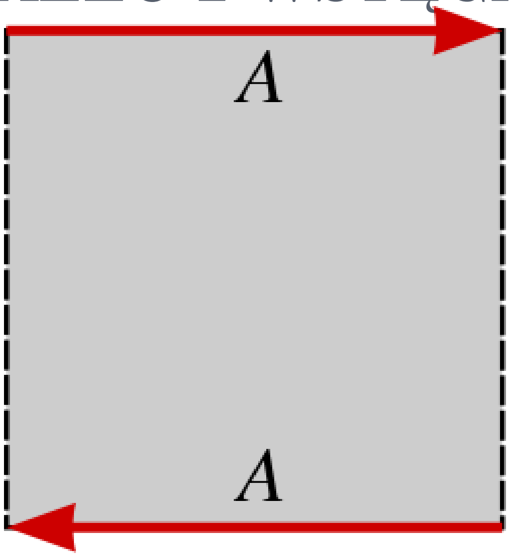


wikipedia.com

By odpowiedzieć na pytanie, zacznijmy malować krawędź wstęgi, zaczynając od zlepionej części, i malujmy (NIE ODRYWAJĄC mazaka) w jedną stronę. Po chwili okaże się,

WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

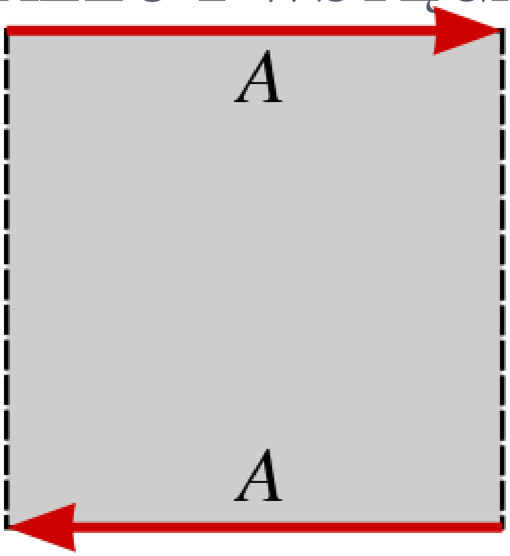
WALEC I WSTĘGA.



wikipedia.com

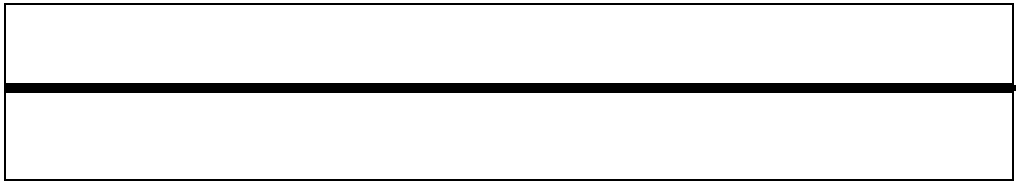
By odpowiedzieć na pytanie, zacznijmy malować krawędź wstęgi, zaczynając od zlepionej części, i malujmy (NIE ODRYWAJĄC mazaka) w jedną stronę. Po chwili okaże się, że wróciliśmy do punktu startowego – czyli ta wstęga ma tylko i wyłącznie jedną krawędź!

Walec i wstęga.



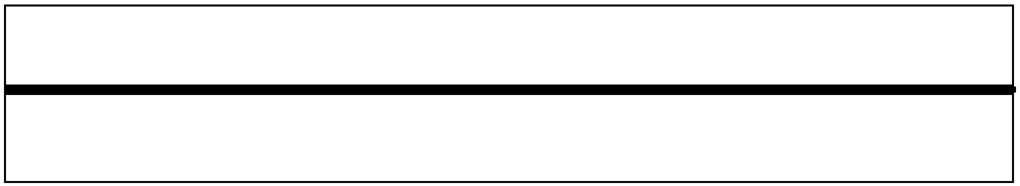
wikipedia.com

- Ile krawędzi ma wstęga Möbiusa?
  - (A) <u>jedną</u>
  - (B) dwie
  - (C) trzy
  - (D) cztery



wikipedia.com

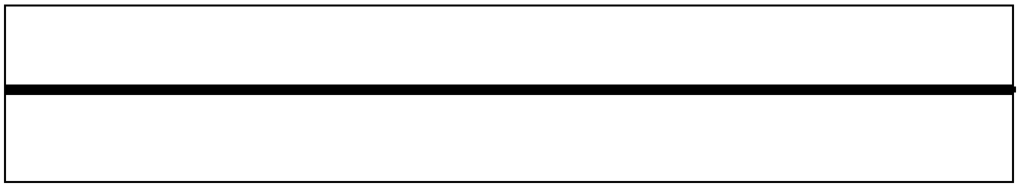
- Przecinamy wstęgę Möbiusa wzdłuż „jej środka”. Co się stanie?
  - (A) Powstaną dwie wstęgi.
  - (B) Powstanie dwa razy dłuższa wstęga.
  - (C) Powstanie walec.



wikipedia.com

- Przecinamy wstęgę Möbiusa wzdłuż „jej środka”. Co się stanie?
  - (A) Powstaną dwie wstęgi.
  - (B) Powstanie dwa razy dłuższa wstęga.
  - (C) Powstanie walec.

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH



wikipedia.com

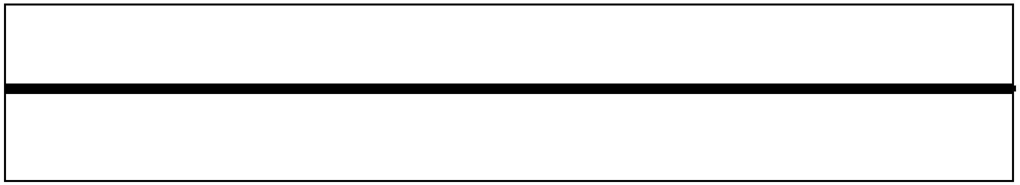
- Jak już wiemy, co się stanie przecinając wstęgę Möbiusa „na pół”, to zróbmy to samo z otrzymaną przed chwilą dwa razy dłuższą wstęgą.

  Co się wtedy stanie?

  (A) Powstaną dwie wstęgi.

  (B) Powstanie dwa razy dłuższa wstęga.

  (C) Powstanie walec.



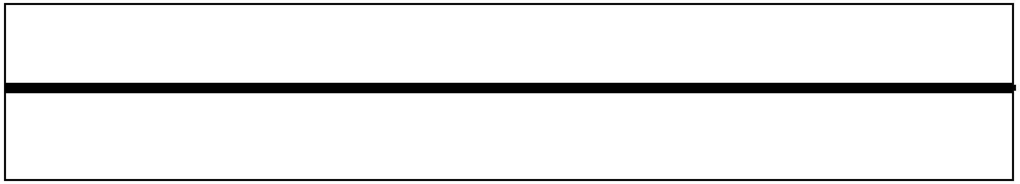
wikipedia.com

- JAK TO MOŻLIWE???
-

Pytanie nr 5

wikipedia.com

- JAK TO MOŻLIWE???
- Za chwilkę sobie wyjaśnimy, najpierw odpowiedzmy na kolejne pytanie☺



wikipedia.com

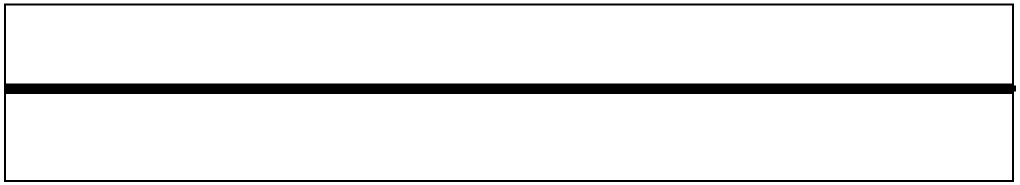
- JAK TO MOŻLIWE???
- Ile stron ma powstała dłuższa wstęga (ta którą otrzymaliśmy po cięciu wzdłuż środka wstęgi Möbiusa)?

  (A) jedną

  (B) dwie

  (C) trzy

  (D) cztery



wikipedia.com

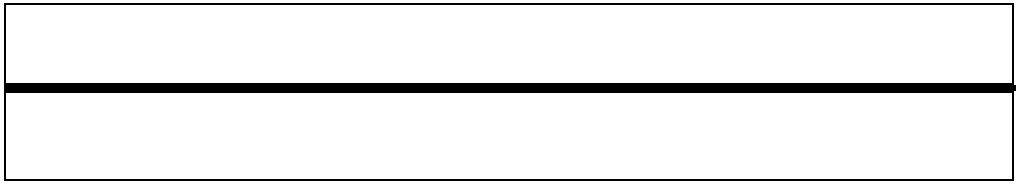
- JAK TO MOŻLIWE???
- Ile stron ma powstała dłuższa wstęga (ta którą otrzymaliśmy po cięciu wzdłuż środka wstęgi Möbiusa)?

  (A) jedną

  (B) dwie

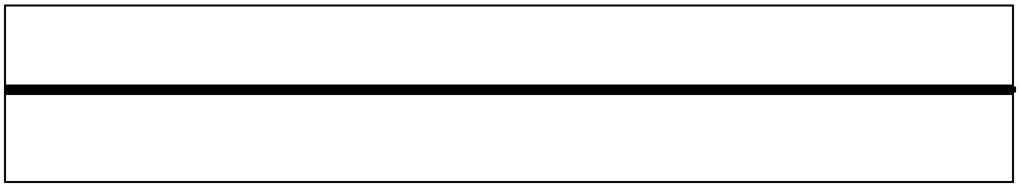
  (C) trzy

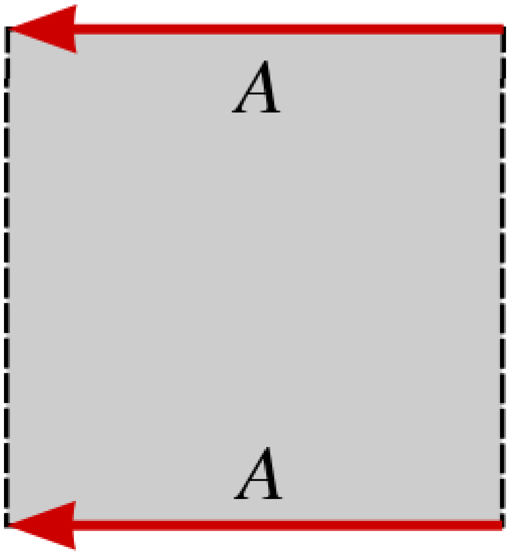
  (D) cztery



wikipedia.com

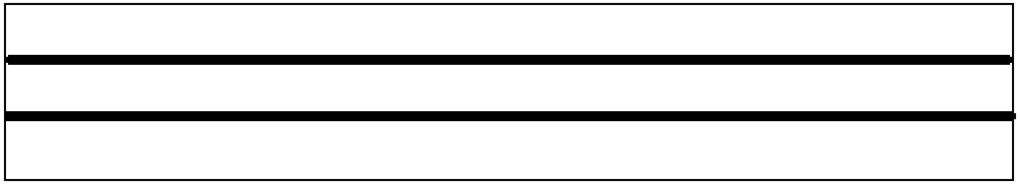
- JAK TO MOŻLIWE???
- Czyli po przekrojeniu wstęgi Möbiusa „na pół” otrzymujemy wstęgę, która nie jest wstęgą Möbiusa, dlatego później, gdy tę nową wstęgą kroimy „na pół” otrzymujemy już odmienną sytuację.





- JAK TO MOŻLIWE???

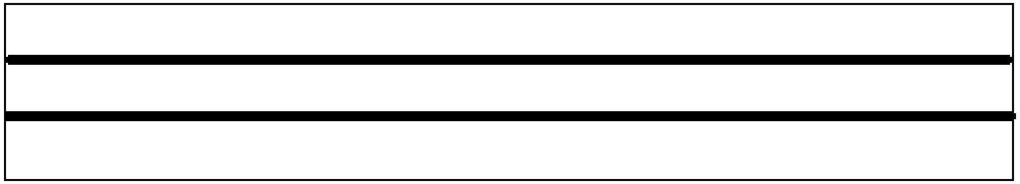
- Jest to akurat wstęga, którą możemy otrzymać z naszego długiego paska, gdy obrócimy jedną krawędź o 360°, a nie o 180°, jak w przypadku wstęgi Möbiusa.



wikipedia.com

- Przecinamy wstęgę wzdłuż linii „1/3”. Co się stanie?
  - (A) Powstaną trzy wstęgi Möbiusa.
  - (B) Powstanie trzy razy dłuższa wstęga Möbiusa.
  - (C) Powstanie trzy razy dłuższa wstęga, która nie jest wstęgą Möbiusa.
  - (D) Powstaną dwie wstęgi: jedna Möbiusa, druga nie.

Pytanie nr 7



wikipedia.com

- Przecinamy wstęgę wzdłuż linii „1/3”. Co się stanie?
  - (A) Powstaną trzy wstęgi Möbiusa.
  - (B) Powstanie trzy razy dłuższa wstęga Möbiusa.
  - (C) Powstanie trzy razy dłuższa wstęga, która nie jest wstęgą Möbiusa.
  - <u>(D) Powstaną dwie wstęgi: jedna Möbiusa, druga nie.</u>

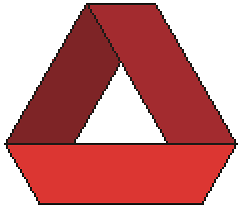
Ta krótsza wstęga jest wstęgą Möbiusa, ta dłuższa nie. Jak ktoś nie wierzy może zacząć kolorować ☺

WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

Czy wstęga Möbiusa się przydaje?

- Skręcone paski, w tym wstęga Möbiusa, są popularnymi motywami zdobniczymi. Można je znaleźć np:
  - logo firmy Renault
  - logo COMMERZBANK
  - na znaczkach pocztowych
  - w symbolu nieskończoności
  - w symbolu recyklingu
  - …

RENAULT



PERFORMANCE
LEADERS
AUSTRALIA

Czy wstęga Möbiusa się przydaje?

Biblioteka w Astanie, Kazachstan

Czy wstęga Möbiusa się przydaje?

Biblioteka w Astanie, Kazachstan

Czy wstęga Möbiusa się przydaje?

ankidyne.com

Pamiętamy, że ta drabinka ma tylko jedną stronę ☺
Co by się stało, gdybyśmy zaczęli po niej chodzić??

Czy wstęga Möbiusa się przydaje?

denmark.net


Taichung Industrial Park

Czy wstęga Möbiusa się przydaje?

- W przemyśle używa się pasów transmisyjnych oraz taśm filmowych skręconych w kształt wstęgi Möbiusa, co powoduje, że ich powierzchnia zużywa się jednakowo po obu stronach, tzn. po jednej stronie ☺

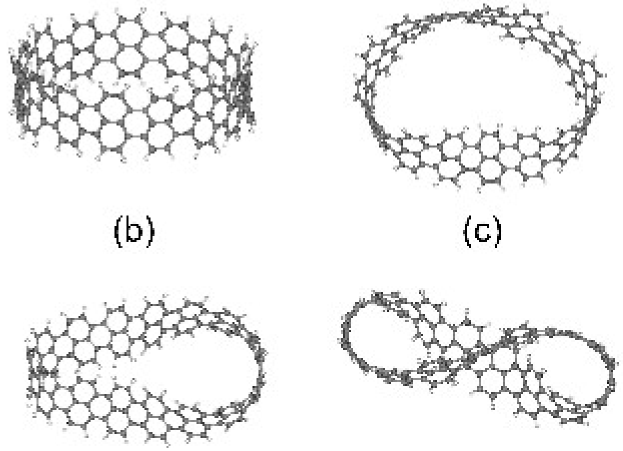
wikipedia.com

WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

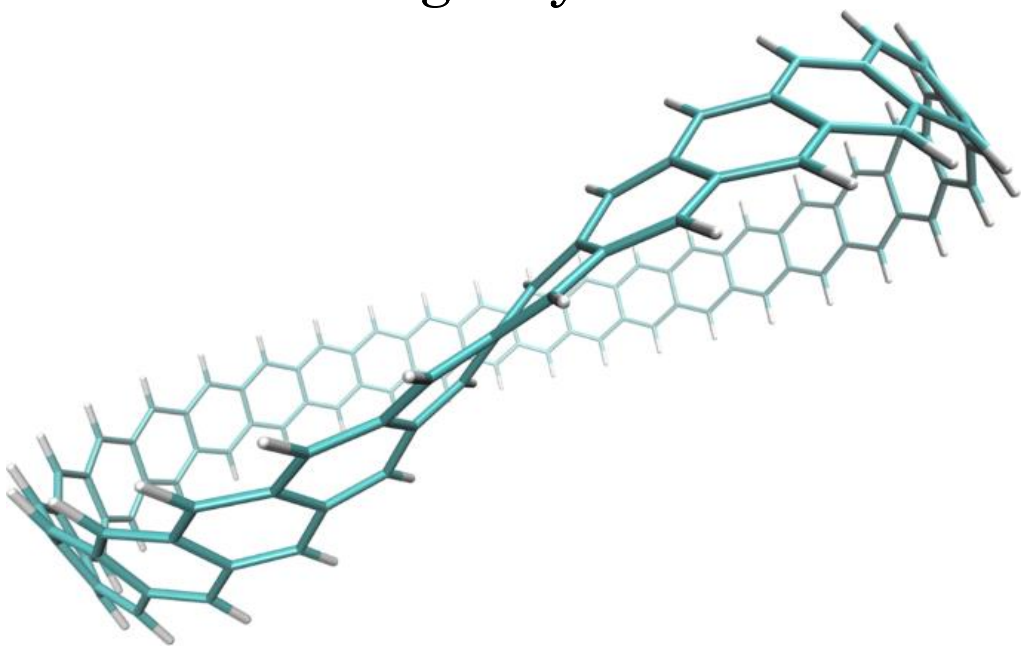
Czy wstęga Möbiusa się przydaje?

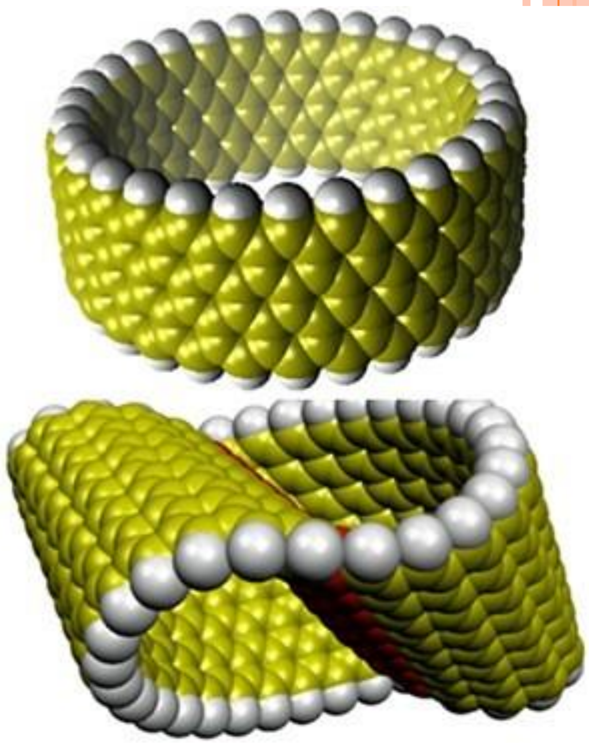
Avengers: Endgame

Grafenowe nanotubki



- Naukowcy w 2021/2022 roku stworzyli grafenowe nanotubki i badają ich własności. Wykazują one dosyć dużą wytrzymałość termiczną oraz interesujące własności magnetyczne.





WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH

Paradoksy matematyki

Łagodne oderwanie się od codzienności matematyki

dr inż. Michał Zwierzyński