

PRAWDA CZY FAŁSZ?

W poszukiwaniu paradoksów w matematyce

Paradoks Zenona z Elei. „Achilles ściga się z żółwiem. Biegnie on 10 razy szybciej od żółwia. Daje mu 100 metrów wyrównania przed sobą. Teraz — powiada Zenon — Achilles przebiegnie te 100 metrów i osiągnie punkt startu żółwia. W tym czasie jednak żółw przeszedł dziesiątą część drogi przebytej przez Achillesa i jest przed nim właśnie o 10 metrów. Achilles przebiega owe 10 metrów. Wtedy żółw przeszedł 1 metr. Achilles przelatuje ten 1 metr. Żółw oddalił się o $\frac{1}{10}$ metra. Achilles przebiega ową $\frac{1}{10}$ metra, a żółw oddala się o $\frac{1}{100}$. Gdy Achilles i tę $\frac{1}{100}$ przebiegł, żółw jest o $\frac{1}{1000}$ metra przed nim. A więc — konkluduje Zenon — Achilles zbliża się coraz bardziej do żółwia, ale go nie może doścignąć.”

Scheda Araba. „Jest to jedno z najstarszych zadań; najprawdopodobniej pochodzenia autentycznie arabskiego, nieznanego autora.

Pewien Arab, umierając, pozostawił jako dziedzictwo swoim trzem synom do podziału stado wielbłądów, przy czym zaznaczył w testamencie, że najstarszy ma otrzymać połowę, średni — trzecią część, a najmłodszy — dziewiątą część dziedzictwa. Okazało się jednak, że w chwili śmierci Araba stado liczyło 17 sztuk.

Podział był trudny, przeto spadkobiercy zwrócili się do kadiego, znanego w całej okolicy ze swej mądrości. Ten wydał sąd następujący: należałoby dopożyczyć jednego wielbłąda i przystąpić do podziału, mając 18 wielbłądów. Bracia postąpili według rady sędziego. Wówczas starszemu w udziale przypadło 9, średniemu 6, a najmłodszemu 2 wielbłądy. Pożyczonego zaś wielbłąda zwrócono jego właścicielowi i trzej bracia byli wysoce zadowoleni z mądrego wyroku kadiego, gdyż w rzeczywistości każdy z nich otrzymał więcej niż ojciec wyznaczył, a mianowicie jeden o $\frac{1}{2}$, drugi o $\frac{1}{3}$, a trzeci o $\frac{1}{9}$ wielbłąda.”

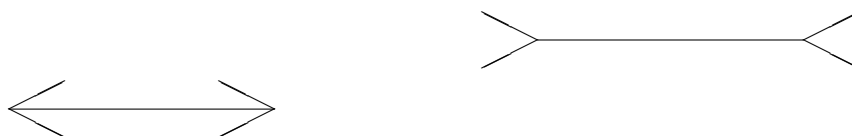
Twierdzenie Banacha-Tarskiego. *Dowolna kula może być podzielona na części tak, by z tych części dało się złożyć dwie kule o takich samych rozmiarach co wyjściowa.*

Twierdzenie Vitaliego. *Odcinek $(0; 2)$ możemy podzielić na takie rozłączne części, że przesuwając je możemy pokryć nimi całą półprostą $(0; +\infty)$.*

Twierdzenie o kole. *Koło o dowolnym promieniu można podzielić na części w ten sposób, że z nich da się złożyć dwa koła o takim samym promieniu co wyjściowe.*

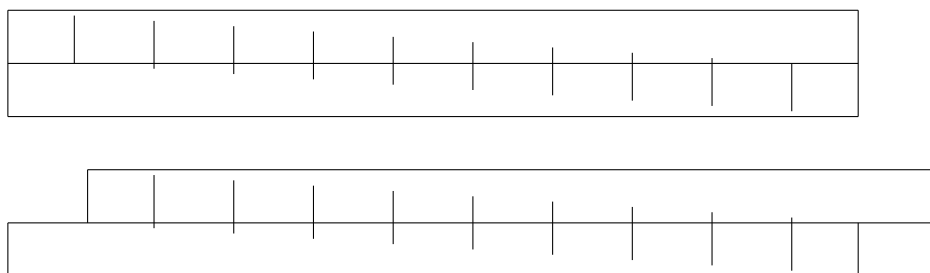
Paradoks Monty Halla. Zawodnik stoi przed trzema zamkniętymi bramkami. Za jedną z nich jest nagroda. Gracz wybiera losowo jedną z bramek, ale prowadzący odsłania jedną z pozostałych, która jest pusta i proponuje dokonanie ponownego wyboru spośród dwóch zamkniętych. Zmiana decyzji przez gracza zwiększa szansę na wygraną. Zainteresowanych odsyłam do http://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks_Monty_Halla.

1. Który odcinek jest dłuższy? Bez dokonywania pomiarów proszę wskazać dłuższy odcinek.

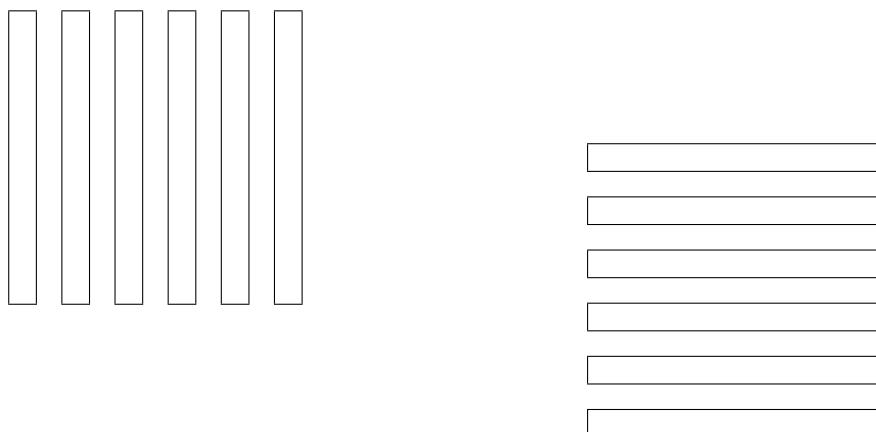


2. Ile razy obróci się koło? Weźmy dwa krążki, jeden o promieniu dwa razy większym od promienia drugiego, np. 3 cm i 1,5 cm. Jeden z nich unieruchamiamy, drugi zaś toczymy po obwodzie unieruchomionego. Dbamy o to, by toczenie odbywało się bez najmniejszego poślizgu. Ile razy musi obrócić się względem swej osi większy krążek przy jednym, pełnym okrążeniu unieruchomionego mniejszego? A ile razy mniejszy?

3. Gdzie zginęła jedna pałeczka? Prostokąty przedstawiają teksturki, które mogą przesuwać się względem siebie. Na nich zostały narysowane pałeczki.



4. Który prostokąt jest wyższy?



5. 1 złoty = 1 grosz. Nietrudno to udowodnić. Jest oczywiste, że

$$10 \text{ gr} = \frac{1}{10} \text{ zł},$$

a więc

$$1 \text{ zł} = 100 \text{ gr} = 10 \text{ gr} \cdot 10 \text{ gr} = \frac{1}{10} \text{ zł} \cdot \frac{1}{10} \text{ zł} = \frac{1}{100} \text{ zł} = 1 \text{ gr},$$

czyli

$$1 \text{ zł} = 1 \text{ gr}.$$

6. Dziwny kwadrat. Działka ma kształt dużego kwadratu. Na planie w skali 1 : 500 jest ona przedstawiona kwadratem o boku 23 cm. Aby obliczyć pole działki najpierw obliczono pole kwadratu na planie. Otrzymano 529 cm^2 , czyli $0,0529 \text{ m}^2$. Ponieważ prawdziwa działka jest 500 razy większa, więc jej pole wynosi

$$500 \cdot 0,0529 \text{ m}^2 = 26,45 \text{ m}^2.$$

Obliczmy teraz bok działki; jest on 500 razy większy, więc wynosi

$$23 \text{ cm} \cdot 500 = 11\,500 \text{ cm} = 115 \text{ m}.$$

Odp.: Tak więc kwadrat o boku 115 m ma pole równe $26,45 \text{ m}^2$!

7. Suma nieskończonego ciągu geometrycznego. Mamy ciąg geometryczny

$$(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots),$$

w którym wyraz początkowy wynosi 1, iloraz -1 . Obliczmy jego sumę według znanego wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

Ponieważ $a = 1$, $q = -1$, więc

$$S = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Z drugiej strony, grupując parami wyrazy sumy tego ciągu, otrzymamy

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0,$$

albo

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1.$$

Suma ciągu jest więc raz równa $\frac{1}{2}$, drugi raz 0 lub wreszcie 1. Jaka jest więc prawdziwa suma tego ciągu?

8. Każda liczba jest równa zero. Niech $x = 1$, wówczas $x^2 = 1$ albo $x^2 - 1 = 0$, czyli $(x+1)(x-1) = 0$. Dzieląc przez $x-1$ otrzymamy dalej $x+1 = 0$, a stąd $x = -1$. Ponieważ na początku było $x = 1$, więc $1 = -1$. Pomnóżmy tę równość przez dowolne a

$$a = -a$$

i przenieśmy a z prawej strony na lewą

$$2a = 0.$$

Stąd wynika, że $a = 0$, bo 2 jest różne od zera. Więc każda liczba jest równa zero

9. Dziwna nierówność. Aby wykazać, że $3 > 5$, obierzmy najpierw cztery liczby a, b, c i d tak, aby

$$a > b, \quad d > c, \quad b > c. \quad (1)$$

Odejmijmy teraz stronami drugą nierówność od pierwszej; otrzymamy

$$a - d > b - c. \quad (2)$$

Ponieważ z trzeciej nierówności (1) wynika

$$b - c > 0,$$

więc na podstawie (2) i prawa przechodniości nierówności mamy

$$a - d > 0,$$

co daje ostatecznie

$$a > d. \quad (3)$$

Aby otrzymać nierówność $3 > 5$ wystarczy obrać zgodnie z warunkami (1) np. liczby $a = 3, b = 2, c = 1, d = 5$. Wtedy z (3) wyniknie $3 > 5$.

10. Czy 3 może być równe 5? Jeżeli wychodząc z równości $3 = 5$ i przekształcając ją poprawnie na wyrażenia równoważne otrzymamy prawdziwy wniosek, to będzie to dowodem, że rzeczywiście $3 = 5$.

Z równości $3 = 5$ wynika równoważna równość

$$3 = 3 + 2.$$

Pomnóżmy tę równość obustronnie przez $3^2 - 6 \cdot 3 + 3^2$ (mnożenie obustronne równości przez tę samą liczbę nie narusza równoważności); otrzymujemy

$$3(3^2 - 6 \cdot 3 + 3^2) = (3 + 2)(3^2 - 6 \cdot 3 + 3^2),$$

albo dalej

$$3^3 - 6 \cdot 3^2 + 3^3 = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2.$$

Przeprowadzając redukcję wyrazów podobnych mamy

$$0 = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2.$$

Przenieśmy $12 \cdot 3$ na lewą stronę

$$12 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2.$$

Mamy stąd

$$12 \cdot 3 = 12 \cdot 3.$$

Jest to niewątpliwie równość prawdziwa. A więc wykazaliśmy, że $3 = 5$.

11. Nierówność ułamkowa. Nierówność $\frac{3x+2}{x-1} > 0$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1^\circ) \quad 3x + 2 > 0 \quad \text{i} \quad x - 1 > 0,$$

$$(2^\circ) \quad 3x + 2 < 0 \quad \text{i} \quad x - 1 < 0.$$

W pierwszym przypadku otrzymujemy (jak łatwo sprawdzić) $x > 1$, natomiast w drugim $x < -\frac{2}{3}$. Ponieważ te wartości na x się wykluczają, więc wynika stąd, że nierówność jest sprzeczna, a przecież np. dla $x = 2$ jest spełniona.

12. Dodanie jedynki nie zmienia liczby. Mamy tożsamość

$$n^2 - n(2n + 1) = (n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1),$$

którą łatwo można sprawdzić przez wymnożenie. Dodajmy do obydwu stron wyrażenie $(\frac{2n+1}{2})^2$:

$$n^2 - n(2n + 1) + \left(\frac{2n + 1}{2}\right)^2 = (n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1) + \left(\frac{2n + 1}{2}\right)^2.$$

Obydwie strony są kwadratami zupełnymi:

$$\left(n - \frac{2n + 1}{2}\right)^2 = \left((n + 1) - \frac{2n + 1}{2}\right)^2.$$

Stąd

$$n - \frac{2n + 1}{2} = n + 1 - \frac{2n + 1}{2}.$$

a wreszcie

$$n = n + 1.$$

13. Zero zeru nierówne. Niech u będzie dowolną liczbą ujemną, natomiast d liczbą dodatnią. Rozpatrzmy następujące wyrażenie

$$\frac{u^3}{\sqrt{du^2}},$$

w którym pierwiastek jest arytmetyczny. Jest ono oczywiście ujemne.

Niewątpliwie możemy, stosując odpowiednie prawa algebraiczne, wyłączyć pierwiastek z u^2 a następnie skrócić ułamek przez u

$$\frac{u^3}{\sqrt{bu^2}} = \frac{u^3}{u\sqrt{b}} = \frac{u^2}{\sqrt{b}}.$$

Otrzymaliśmy wyrażenie dodatnie $\frac{u^2}{\sqrt{b}}$. Mamy więc

$$0 > \frac{u^3}{\sqrt{bu^2}} = \frac{u^2}{\sqrt{b}} > 0.$$

czyli

$$0 > 0.$$

14. Dowolna wielokrotność liczby dodatniej nie może być dowolnie wielka. Niech p będzie dowolną liczbą dodatnią mniejszą od q :

$$0 < p < q.$$

Mnożymy tę nierówność obustronnie przez p

$$p^2 < pq$$

i odejmujemy od obydwu stron q^2

$$p^2 - q^2 < pq - q^2.$$

Obydwie strony rozkładamy na czynniki

$$(p + q)(p - q) < q(p - q).$$

Dzieląc przez $p - q$ otrzymamy stąd

$$p + q < q.$$

Dodajmy do tej nierówności stronami nierówność wyjściową $p < q$, a następnie odejmijmy od obydwu stron q . Otrzymamy

$$2p < q.$$

Nierówność tę wyprowadziliśmy wychodząc z nierówności $p < q$. Podobnie postępując można, wychodząc z nierówności $2p < q$, wykazać, że $4p < q$, albo wychodząc z tej ostatniej można wykazać, że $8p < q$ itd. Czyli dowolna wielokrotność liczby dodatniej p nie może przekroczyć liczby q .

15. Niesforne logarytmy po raz pierwszy. Prawdziwa jest nierówność

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^3,$$

a stąd

$$2 \lg \frac{1}{3} > 3 \lg \frac{1}{3}.$$

Dzieląc tę nierówność obustronnie przez $\lg \frac{1}{3} \neq 0$ otrzymujemy

$$2 > 3.$$

16. Niesforne logarytmy po raz drugi. Wychodzimy z takiej samej nierówności co poprzednio (oczywiście prawdziwej)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

Zlogarytmujemy ją przy podstawie $\frac{1}{2}$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^3,$$

czyli

$$2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}.$$

Dzieląc obie strony ostatniej nierówności przez $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 0$, otrzymujemy

$$2 > 3.$$

17. Nierówność podwójna. Rozważmy nierówność podwójną

$$2x - 1 < x + 3 < 3x + 2.$$

która — jak łatwo sprawdzić — jest spełniona dla x równego np. 1, 2, 3 i innych.

Dla ułatwienia rozwiązania przenieśmy -1 na drugą stronę pierwszego znaku nierówności

$$2x < x + 4 < 3x + 2,$$

następnie przenieśmy 4 na drugą stronę drugiego znaku nierówności, przez co otrzymamy znacznie łatwiejszą nierówność

$$2x < x < 3x - 2.$$

Nierówność ta jest spełniona, gdy zachodzą jednocześnie nierówności:

$$2x < x \text{ i } x < 3x - 2.$$

Pierwsza z nich jest spełniona dla $x < 0$ a druga dla $x > 1$. Ponieważ te nierówności wzajemnie się wykluczają, więc stąd wynika, że podana na początku nierówność jest sprzeczna, a przecież była spełniona między innymi dla 1, 2, 3...

18. Niesforne logarytmy po raz trzeci. Wszyscy dobrze znają definicję logarytmu. Wynika z niej na przykład, że

$$\log_{10} \frac{1}{100} = -2, \quad \text{bo} \quad 10^{-2} = \frac{1}{100}.$$

Podobnie mamy

$$(1^\circ) \quad \log_1 1 = 2, \quad \text{bo} \quad 1^2 = 1.$$

a także

$$(2^\circ) \quad \log_1 1 = 3, \quad \text{bo} \quad 1^3 = 1.$$

Ponieważ lewe strony równości (1°) i (2°) są równe, więc i prawe strony muszą być równe, czyli

$$2 = 3.$$

19. Jeszcze jedna dziwna równość. Uczeń nie mogąc sobie poradzić z bezpośrednią redukcją funkcji trygonometrycznej zredukował $\cos 240^\circ$ stopniowo zmniejszając kąt tylko o 90° i rozumując w następujący sposób:

„ $\cos 240^\circ = \cos(90^\circ + 150^\circ)$. Stosuję do redukcji kąt 90° , więc otrzymam kofunkcję, czyli sinus, a ponieważ kąt 240° jest z trzeciej ćwiartki i funkcja $\sin x$ jest tam ujemna, więc $\cos 240^\circ = -\sin 150^\circ$.

Podobnie dalej $\cos 240^\circ = -\sin 150^\circ = -\sin(90^\circ + 60^\circ)$. Do redukcji używam kąta 90° , więc otrzymam cosinus; kąt 150° jest z drugiej ćwiartki, a tam $\cos x$ jest ujemny, więc $\cos 240^\circ = -\sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.”

Jeśli zastosować redukcję bezpośrednią, otrzymamy

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Tak więc

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

20. Dla dowolnych a i b jest jednocześnie $a > b$ i $a < b$.

Aby to wykazać, obierzemy dowolnie trzy liczby a , b i c . Dla ustalenia uwagi założmy, że c jest najmniejszą z nich

$$a > c \text{ i } b > c.$$

Jeżeli odejmiemy stronami pierwszą nierówność od drugiej, to otrzymamy $b - a > 0$, czyli

$$b > a.$$

Jeżeli postąpimy odwrotnie, drugą nierówność odejmiemy od pierwszej, to otrzymamy $a - b > 0$, czyli

$$a > b.$$

Jest więc jednocześnie $a > b$ i $b > a$.

21. Nareszcie ulga dla dłużników. Jeżeli jesteś winien 200 zł, to śmiało możesz oddać 100 zł i jeszcze uważać, żeś oddał więcej niż się należało, łatwo się bowiem przekonać, że $100 > 200$. Wystarczy zastosować rachunek algebraiczny. Dla dowolnych a i b prawdziwe są oczywiście nierówności:

$$b - 100 < b,$$

$$a < a + 200.$$

Odejmując stronami te nierówności — od pierwszej drugą — otrzymamy

$$b - 100 - a < b - a - 200,$$

albo

$$b - a - 100 < b - a - 200.$$

Po pomnożeniu obu stron przez -1 otrzymujemy dalej

$$a - b + 100 > a - b + 200.$$

Jeżeli teraz od obu stron nierówności odejmiemy liczbę $a - b$, to otrzymamy relację zapowiadaną na początku

$$100 > 200.$$

22. Cecha i mantysa. Logarytm przy podstawie 2 liczby 0,5 — jak łatwo sprawdzić — wynosi

$$\log_2 0,5 = -1.$$

Czyli cecha wynosi -1 , mantysa 0 . Ponieważ liczby różniące się tylko położeniem przecinka mają logarytmy o jednakowych mantysach, a różnią się tylko cechami, więc $\log_2 50$ będzie miał mantysę również równą 0 . Liczba logarytmowana jest 100 razy większa, więc cecha będzie o 2 większa:

$$\log_2 50 = 1.$$

Odejmując od tej równości poprzednią równość otrzymujemy

$$\log_2 50 - \log_2 0,5 = 1 - (-1) = 2,$$

albo

$$\log_2 \frac{50}{0,5} = 2.$$

Wynika stąd, zgodnie z definicją logarytmu, że

$$2^2 = \frac{50}{0,5},$$

czyli

$$4 = 100.$$

23. Ćwiartka większa od połówki. Nie może chyba ulegać wątpliwości, że

$$2 \lg a > \lg a.$$

Stąd wynika, że

$$\lg a^2 > \lg a.$$

Podstawiając do statniej nierówności $a = \frac{1}{2}$, otrzymamy

$$\lg \frac{1}{4} > \lg \frac{1}{2}.$$

Ponieważ większemu logarytmowi odpowiada większa liczba logarytmowana, więc

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{2}.$$

24. 1 jest większe od 1. Ponieważ funkcja $\cos x$ jest malejąca w drugiej ćwiartce, więc jej wartość dla większego kąta jest mniejsza, np.

$$\cos 120^\circ > \cos 150^\circ.$$

Podzielmy tę nierówność obustronnie przez $\cos 150^\circ$

$$\frac{\cos 120^\circ}{\cos 150^\circ} > 1$$

i zastosujmy wzory redukcyjne $\cos 120^\circ = -\sin 30^\circ$, $\cos 150^\circ = -\sin 60^\circ$.
Otrzymamy

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} > 1.$$

Podstawiając wartości za $\sin 30^\circ$ i $\sin 60^\circ$ otrzymamy dalej

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} > 1,$$

skąd

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > 1.$$

Ponieważ $\sqrt{3} > 1$, więc

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < 1.$$

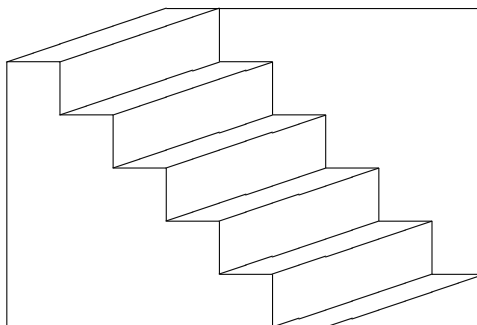
Ostatecznie więc otrzymaliśmy, że

$$1 > \frac{1}{\sqrt{3}} > 1,$$

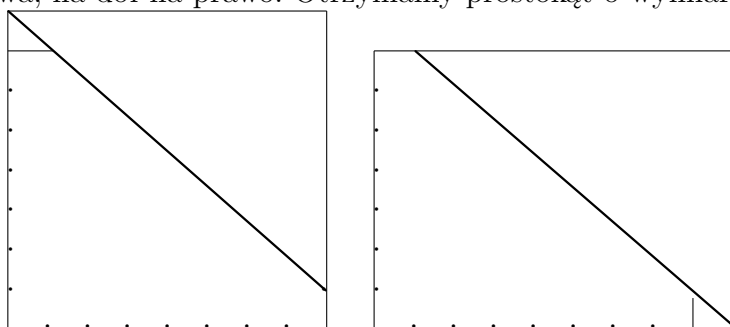
czyli

$$1 > 1.$$

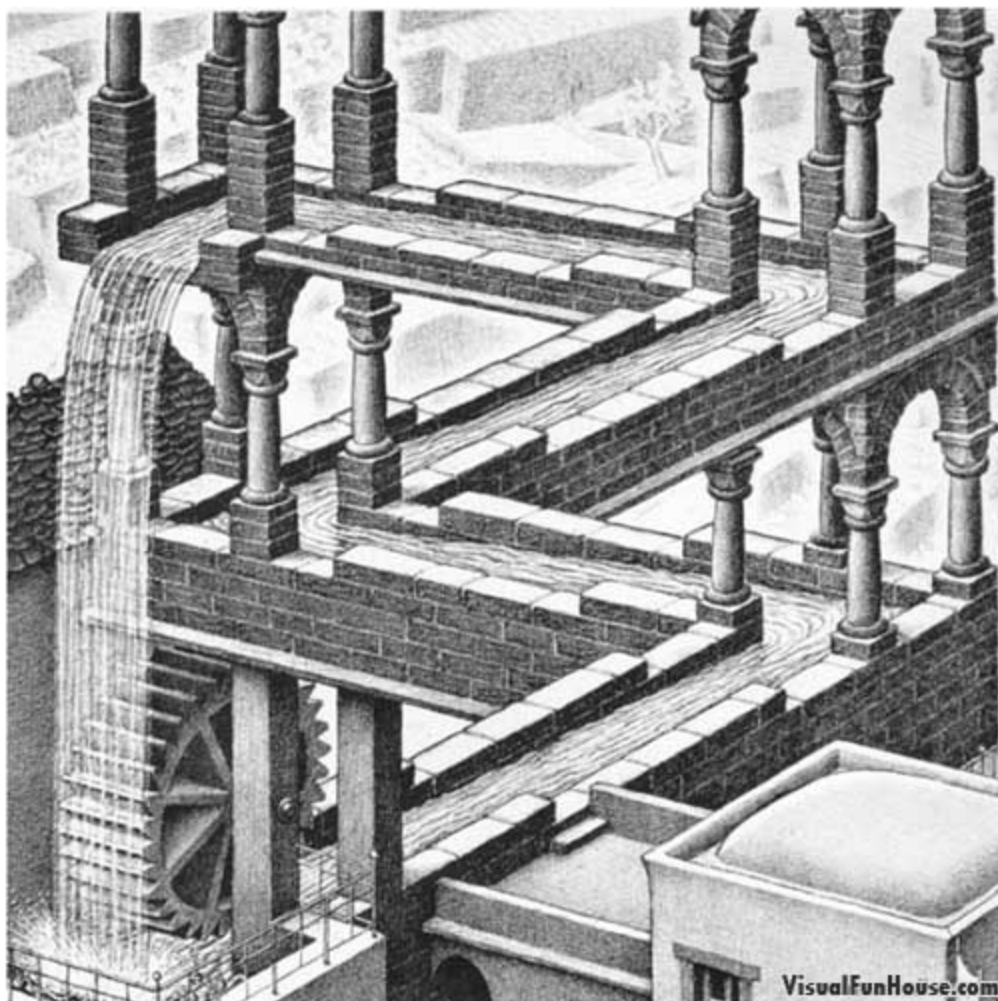
27. Schody Zöllnera. Co widać, gdy patrzymy na nie z góry, a co od spodu?.



28. Gdzie zginął jeden kwadracik? Weźmy kwadrat o wymiarach 8×8 . Rozetnijmy go wzdłuż linii pokazanych na lewym rysunku. Zsuńmy górną część wzdłuż ukośnej linii ku podstawie, zaś mały trójkącik przenieśmy z góry z lewa, na dół na prawo. Otrzymamy prostokąt o wymiarach 7×9 .



29. Iluzja optyczna, Wodospad Eschera.



LITERATURA

A. Dubiecka i M. Gawęł: „Igraszki z matematyką”, Wydawnictwo NO-WIK.

Lancelot Hogben: „Matematyka dla milionów”, KiW, Warszawa 1952.

Opr. Marta Hydzik-Żmuda: „Księga humoru”, Agencja Wydawnicza Ad Oculos, Warszawa — Rzeszów 2010.

S. Jeleński: „Lîlâvatî. Rozrywki matematyczne”, Nakładem Księgarni Św. Wojciecha.

Szczepan Jeleński: „Śladami Pitagorasa. Rozrywki matematyczne”, PZWS, Warszawa 1951.

Michał Szurek: „Opowieści matematyczne”, WSiP, Warszawa 1987.

A. T. Troskalański: „O paradoksach naukowych mechaniki płynów”. Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej nr 112, Inżynieria Sanitarna 8, Wrocław 1965.

„Delta”. Popularny miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

„Matematyka”. Czasopismo dla nauczycieli.

„Młody Technik”. Miesięcznik.

http://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks_Monty_Halla

http://www.walter-fendt.de/ph14pl/singleslit_pl.htm

http://www.walter-fendt.de/ph14pl/doubleslit_pl.htm