MiNI Akademia Matematyki - 10 grudnia 2011
O rekurencji i nie tylko - ZADANIA

1. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n:

   (a) $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$,
   (b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
   (c) $a^n + b^n \leqslant (a + b)^n$ dla dowolnych stałych $a, b \geqslant 0$,
   (d) $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ (nierówność Bernoulliego),
   (e) liczba $n^2 + n$ jest podzielna przez 2,
   (f) liczba $10^n - 4$ jest podzielna przez 6,
   (g) liczba $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ jest podzielna przez 19,
   (h) liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

2. Rozwiąż równanie rekurencyjne postaci:

   (a) $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$ oraz $a_0 = 1,\ a_1 = 2$,
   (b) $a_n = a_{n-1} + 2^n$, dla $n \geqslant 1$ oraz $a_0 = 1$,
   (c) $a_n = a_{n-1} + 6n$ dla $n \geqslant 1$ oraz $a_0 = 0$
   (d) $a_n = a_{n-1}^2 - 3$, dla $n \geqslant 1$ oraz $a_0 = 1$,
   (e) $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$ oraz $a_0 = 2$, $a_1 = 3$.

3. Oprocentowanie wkładów w banku wynosi 10% w skali rocznej. Odsetki są dopisywane na koniec każdego roku. Co się bardziej opłaca: przez n lat wpłacać po 100 euro na koniec każdego roku czy raz na początku wpłacić 1000 euro?
4. Wiadomo, że co roku pewien pracownik otrzymuje podwyżkę pensji, która wynosi 20% kwoty pensji wypłacanej przez ostatni rok minus 11% kwoty pensji wypłacanej rok wcześniej. Na początku pracownik zarabia 1 tys. złotych. Ile będzie zarabiał po n latach?
5. W pewnym państwie cena rajdowej wersji kosiarki do trawy w momencie wstąpienia do Unii Europejskiej wynosiła 1 tys. euro a w miesiąc po wstąpieniu wynosiła już 2 tys. euro. W każdym następnym miesiącu cena kosiarki była ustalana jako różnica pomiędzy ceną kosiarki z poprzedniego miesiąca pomnożoną przez 7 i ceną kosiarki sprzed dwóch miesięcy pomnożoną przez 6. Znajdź wzór jawny na k_n-cenę kosiarki (w tys. euro) w n miesięcy po wstąpieniu do Unii Europejskiej.
6. Jasio zbiega ze schodów, które mają n stopni. W każdym momencie Jasio może przeskoczyć na następny stopień lub ominąć jeden stopień. Na ile sposobów Jasio może zbiec ze schodów?
7. Na ile sposobów można szachownicę wymiaru n na 2 pokryć kostkami domina (wymiaru 2 na 1 - nie muszą do siebie pasować). A na ile sposobów szachownicę n na 3?
8. Wiedząc, że ciąg D_n spełnia równanie: $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, dla $n \geqslant 3$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$ wykaż, że $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ dla $n \geqslant 2$.
9. Czy liczba F_{528} jest a) parzysta czy nieparzysta b) podzielna przez 3 ?
10. Udowodnić, że:

    $F_{m+n} = F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}$ (wskazówka: użyć indukcji po $m + n$).
11. 41 ciastek ponumerowanych kolejno od 1 do 41 umieszczono na okręgu. Małgosia zjada kolejno (zgodnie z kierunkiem ponumerowania) co drugie ciastko począwszy od ciastka o numerze 1. Ciastko, o którym numerze zje jako ostatnie ? Spróbuj uogólnić znalezione rozwiązanie dla przypadku n ciastek. Jak wygląda rozwiązanie tego problemu w sytuacji gdy zjada co trzecie ciastko ?