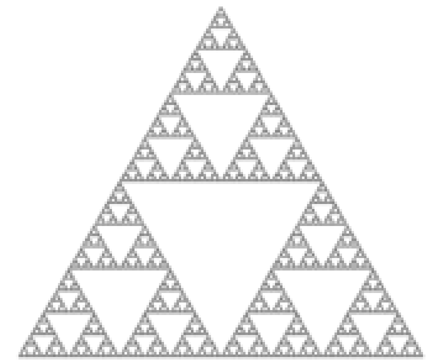
O rekurencji i nie tylko



dr Krzysztof Bryś

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

10 grudnia 2011

Co to jest rekurencja ?

Intuicyjnie:

rekurencja – sprowadzenie rozwiązania danego problemu do rozwiązania tego samego problemu ale dla danych o mniejszym rozmiarze

Przykład

Problem:

Dane: Twierdza broniona przez *n* strażników, Indiana Jones i dwóch jego pomocników

Szukane: Twierdza zdobyta przez Indianę Jones.

Autor: John Griffits

Przykład

Problem:

Dane: Twierdza broniona przez *n* strażników, Indiana Jones i dwóch jego pomocników

Szukane: Twierdza zdobyta przez Indianę Jones.

Rozwiązanie nierekurencyjne:

Wyskakują z krzaków i zdobywają twierdzę (o ile im się uda)

Przykład

Problem:

Dane: Twierdza broniona przez *n* strażników, Indiana Jones i dwóch jego pomocników

Szukane: Twierdza zdobyta przez Indianę Jones.

Rozwiązanie rekurencyjne:

Eliminują „po cichu" jednego strażnika.

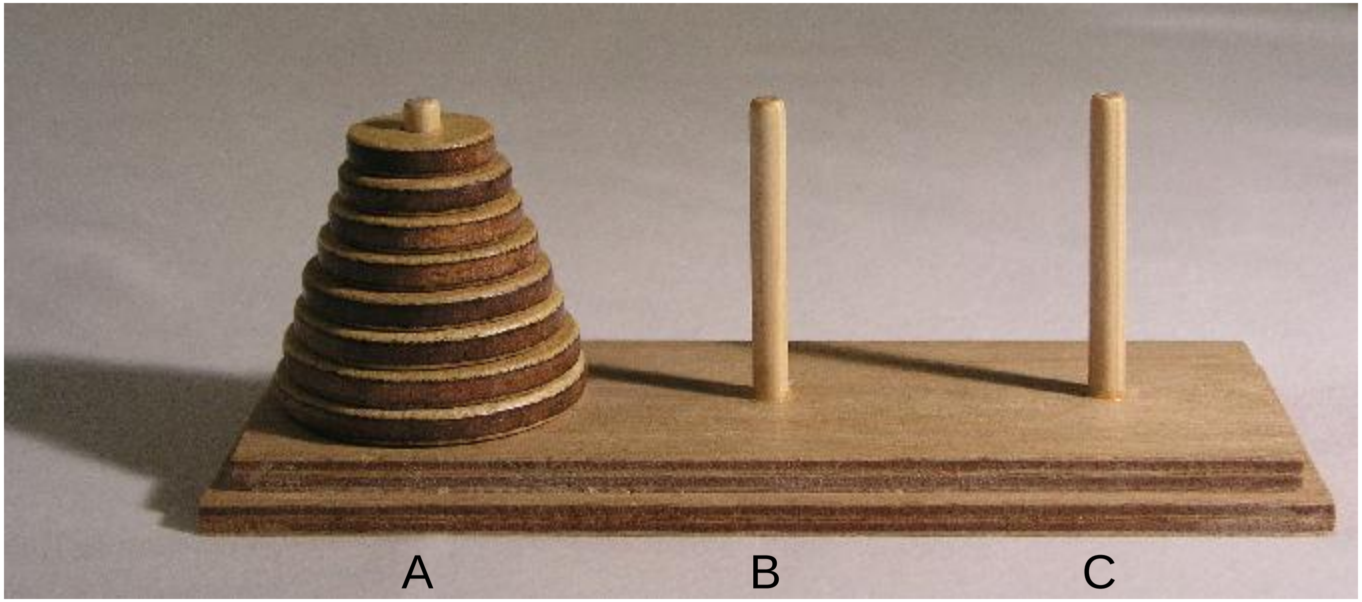
Następnie rozwiązują ten sam problem ale dla twierdzy bronionej przez $n-1$ strażników.

Jeśli $n < 4$, to rozwiązują ten problem metodą bezpośrednią (nierekurencyjną)

Algorytm rekurencyjny

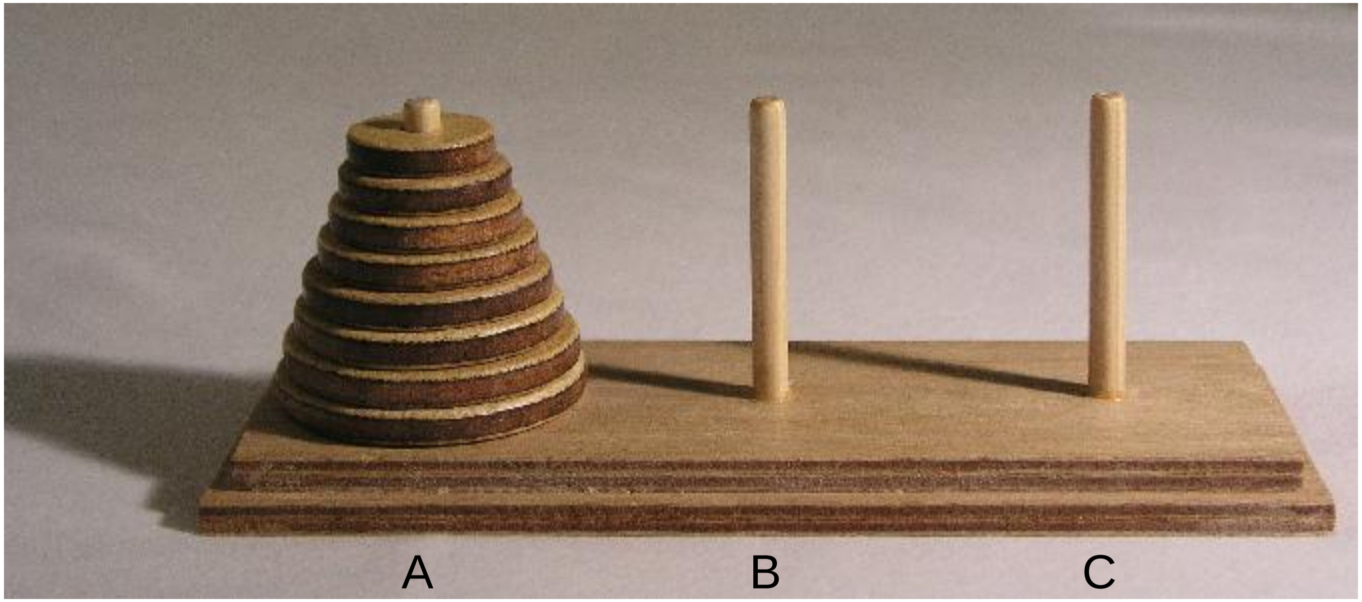
algorytm rekurencyjny = algorytm, w którym występują wywołania tego samego algorytmu ale dla danych o mniejszym rozmiarze oraz zdefiniowany jest sposób rozwiązania dla tak zwanego „przypadku trywialnego” czyli odpowiednio małego rozmiaru danych.

Wieże Hanoi



Mamy *n* krążków o malejących średnicach, każdy z nich posiada wydrążoną dziurkę i jest „nadziany” na słupek A. Pozostałe słupki są puste.

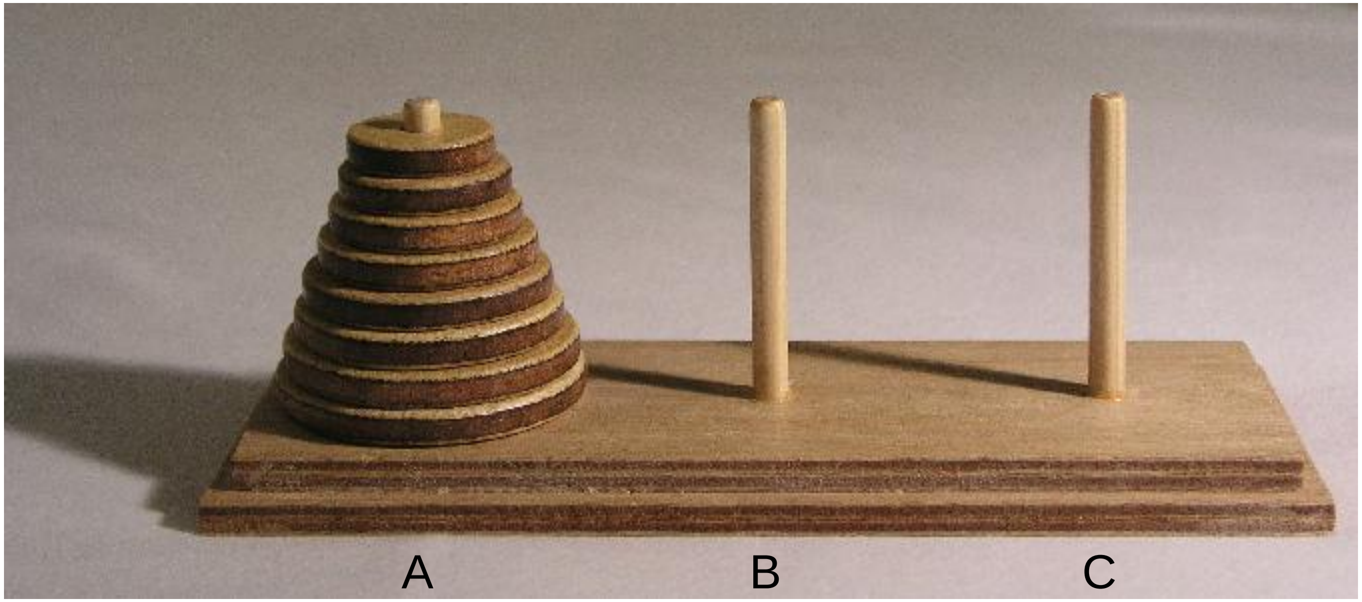
Wieże Hanoi



Zadanie polega na przeniesieniu wszystkich krążków ze słupka A na C przy czym:

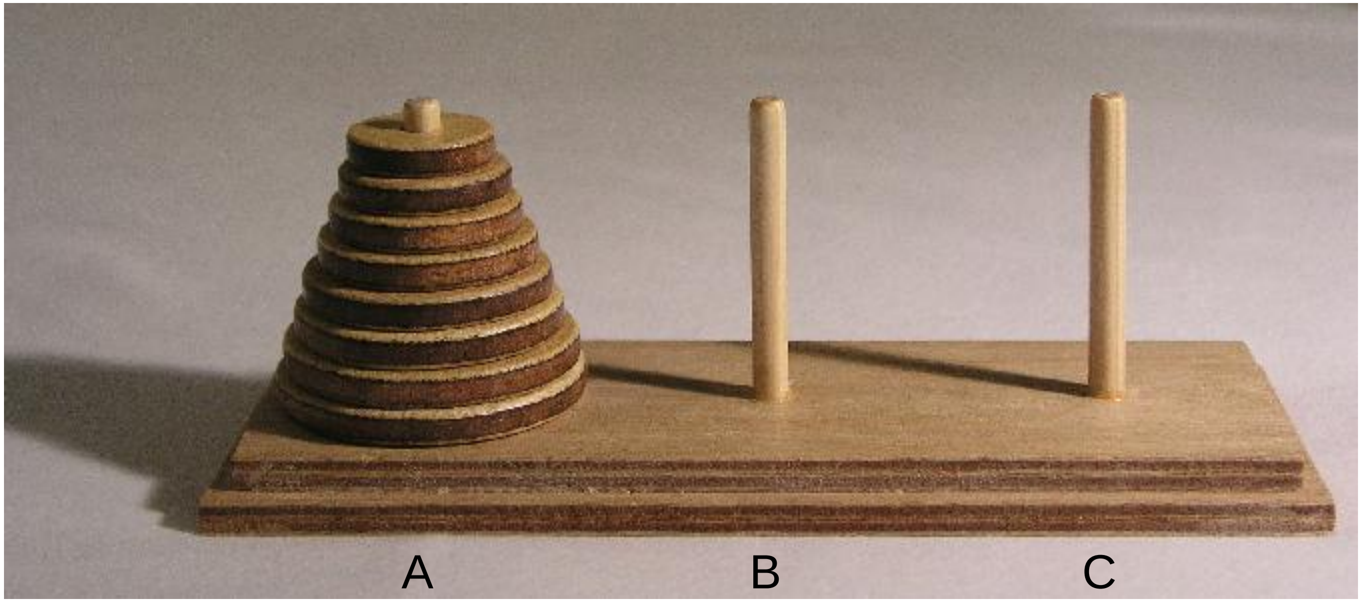
- krążki przenosimy pojedynczo,
- krążek większy nigdy nie może leżeć na krążku mniejszym

Wieże Hanoi



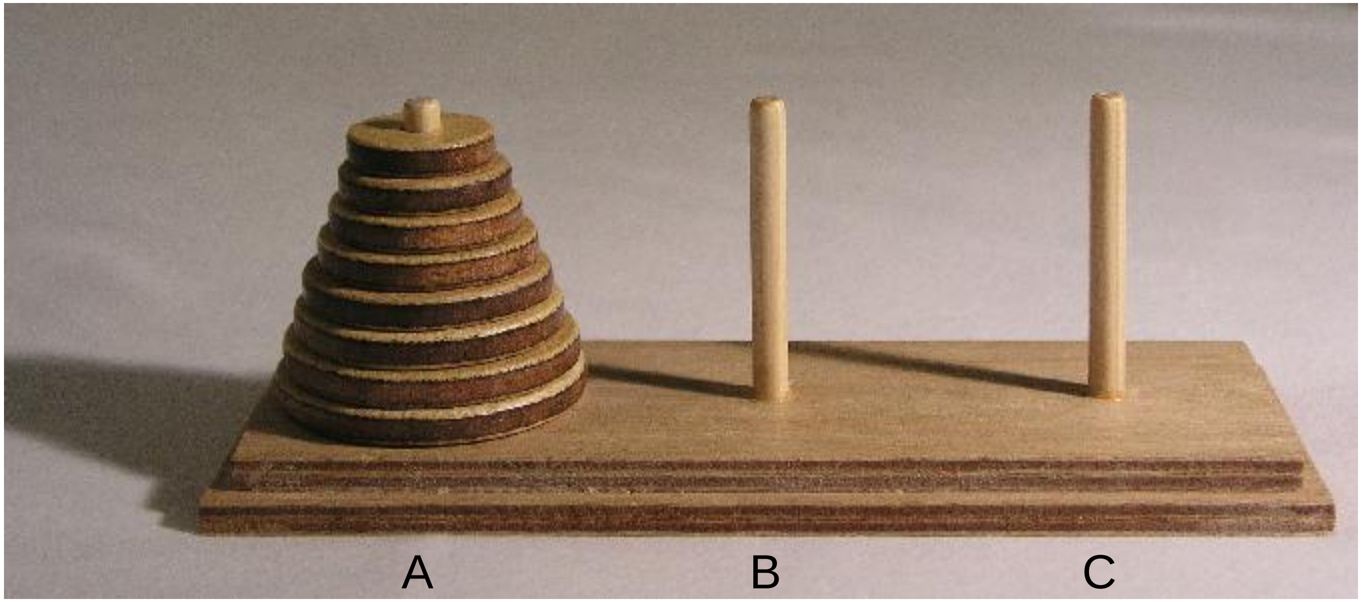
Francuski matematyk
Eduard Lucas (XIX wiek) zaproponował tą zagadkę dla n=8 krążków.

Wieże Hanoi



Legenda głosi, że tybetańscy mnisi w świątyni Brahmy rozwiązują tą zagadkę dla n=64 krążków a kiedy skończą nastąpi koniec świata

Wieże Hanoi – algorytm rekurencyjny



1. Przenieś (rekurencyjnie) n−1 krążków ze słupka A na B posługując się słupkiem C.
2. Przenieś największy krążek z A na C.
3. Przenieś (rekurencyjnie) n−1 krążków ze słupka B na C posługując się słupkiem A.

Wieże Hanoi – algorytm nierekurencyjny

1. Przenieś najmniejszy krążek na kolejny słupek.

   (jeśli n jest parzyste to następny po prawej, jeśli n nieparzyste to następny po lewej, przy czym zakładamy, że na prawo od słupka C jest A a na lewo od a A jest C)
2. Wykonaj jedyny możliwy ruch, który nie zmienia położenia najmniejszego krążka
3. Powtarzaj kroki 1 i 2 aż do otrzymania rozwiązania.

Ciąg zdefiniowany rekurencyjnie

Ciąg zdefiniowany wzorem (równaniem) rekurencyjnym:

$$a_n = h\,(n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}) \text{ dla } n \geq k$$

oraz

$a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ są dane (warunki brzegowe),

gdzie h – pewna funkcja,

$k =$ stała zwana głębokością rekurencji

Np.

$a_n = a_{n-1} + 3$ dla n>0 oraz $a_0 = 0$,

$a_n = 3a_{n-1}$ dla n>0 oraz $a_0 = 3$.

Tworzenie zależności rekurencyjnej

- „Odgadnięcie” i udowodnienie zależności rekurencyjnej.

- Wyznaczenie (sprawdzenie) dla początkowych wartości argumentu (liczb naturalnych) – tym samym wyznaczenie warunków brzegowych.

Wzór jawny na *n*–ty wyraz ciągu = rozwiązanie równania rekurencyjnego

wzór, w którym *n*–ty wyraz ciągu (a_n) zależy jedynie od *n* i od pewnych stałych (a nie zależy od poprzednich wyrazów tego ciągu)

Np.

$$a_n = 3n,$$
$$a_n = 3^{n+1}$$

Nazywa się też postacią zwartą.

Przykład: Wieże Hanoi – złożoność algorytmu rekurencyjnego

1. Przenieś (rekurencyjnie) n−1 krążków ze słupka A na B posługując się słupkiem C.
2. Przenieś największy krążek z A na C.
3. Przenieś (rekurencyjnie) n−1 krążków ze słupka B na C posługując się słupkiem A.

Niech $H(n)$ = liczba ruchów potrzebnych do przełozenie n krążków.

$$\underbrace{H(n-1)}_{\text{krok 1}} + \underbrace{1}_{\text{krok 2}} + \underbrace{H(n-1)}_{\text{krok 3}}$$

$H(n) = H(n-1) + 1 + H(n-1)$ dla $n>1$

krok 1 krok 2 krok 3

oraz $H(1)=1$

Przykład: Wieże Hanoi – złożoność algorytmu rekurencyjnego

Czyli

$$H(n)=2H(n-1)+1 \text{ dla } n>1 \text{ oraz } H(1)=1$$

Przykład: Wieże Hanoi – złożoność algorytmu rekurencyjnego

Czyli

$$H(n)=2H(n-1)+1 \text{ dla } n>1 \text{ oraz } H(1)=1$$

No tak.. Ale jak to rozwiązać ?!

Króliki Fibonacciego

W 1202 roku Leonardo Fibonacci z Pizy sformułował następujący problem:

- Na początku mamy jedną parę nowonarodzonych królików

Króliki Fibonacciego

W 1202 roku Leonardo Fibonacci z Pizy sformułował następujący problem:

- Na początku mamy jedną parę nowonarodzonych królików
- Każdej parze królików co miesiąc (ale począwszy od drugiego miesiąca po urodzeniu) rodzi się jedna para królików

Króliki Fibonacciego

W 1202 roku Leonardo Fibonacci z Pizy sformułował następujący problem:

- Na początku mamy jedną parę nowonarodzonych królików
- Każdej parze królików co miesiąc (ale począwszy od drugiego miesiąca po urodzeniu) rodzi się jedna para królików
- Króliki są nieśmiertelne (w wersji angielskiej brzmi to: RABBITS NEVER DIE !)

Zagadka Fibonacciego

Ile będzie par królików po *n* miesiącach ?

Zagadka Fibonacciego

Ile będzie par królików po n miesiącach ?

Niech F_n = liczba par królików po n miesiącach

Zagadka Fibonacciego

Ile będzie par królików po *n* miesiącach ?

Niech F_n = liczba par królików po *n* miesiącach

Liczba par królików = liczba „starych” par + liczba „nowonarodzonych” par

Zagadka Fibonacciego

Ile będzie par królików po *n* miesiącach ?

Niech F_n = liczba par królików po *n* miesiącach

Liczba par królików = liczba „starych" par + liczba „nowonarodzonych" par

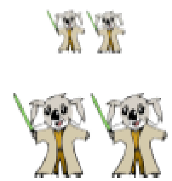
czyli

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2 \quad \text{oraz} \quad F_0 = F_1 = 1$$

Króliki Fibonacciego

1

Króliki Fibonacciego



1

Króliki Fibonacciego

1

1

Króliki Fibonacciego

1

1

Króliki Fibonacciego

1

1

2

Króliki Fibonacciego

1

1

2

Króliki Fibonacciego

1

1

2

3

Króliki Fibonacciego

1

1

2

3

Króliki Fibonacciego

1

1

2

3

5

Króliki Fibonacciego

Króliki Fibonacciego

Te śliczne króliki Jedi stworzył Tomasz Brengos przygotowując slajdy do wykładu
„Wojna stałych”, T.Brengos, K.Bryś, P.Naroski
(wykorzystane za zgodą autora)

Zagadka Fibonacciego

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geq 2$ oraz $F_0 = F_1 = 1$

Jak wygląda wzór jawny czyli rozwiązanie tego równania zależne tylko od n ?

Zagadka Fibonacciego

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geq 2$ oraz $F_0 = F_1 = 1$

Jak wygląda wzór jawny czyli rozwiązanie tego równania zależne tylko od n ?

Myślano, myślano ….

Zagadka Fibonacciego

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geq 2$ oraz $F_0 = F_1 = 1$

Jak wygląda wzór jawny czyli rozwiązanie tego równania zależne tylko od n ?

Myślano, myślano i przez ponad 500 lat nic nie wymyślono

Metody rozwiązywania równań rekurencyjnych

- Metoda naiwna
- Metoda iteracyjna
- Metoda uniwersalna

Meotda naiwna

1. Odgadnij rozwiązanie równania
2. Udowodnij jego prawdziwość

   (np. za pomocą indukcji matematycznej)

Zasada indukcji matematycznej

Ogólna zasada indukcji matematycznej

Jeżeli

1) (baza indukcji) Twierdzenie $T(n_0)$ jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej n_0

oraz

2) (krok indukcyjny) dla dowolnego $n>n_0$, z prawdziwości twierdzenia $T(k)$, dla każdego $n_0 \leq k<n$, wynika prawdziwość twierdzenia $T(n)$,

to

Twierdzenie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$

Zasada indukcji matematycznej

Zasada indukcji matematycznej z krokiem jeden

Jeżeli

1) (baza indukcji) Twierdzenie $T(n_0)$ jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej n_0

oraz

2) (krok indukcyjny) dla dowolnej liczby naturalnej $n>n_0$, z prawdziwości twierdzenia $T(n-1)$ wynika prawdziwość twierdzenia $T(n)$,

to

Twierdzenie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$


Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

permutacja zbioru n-elementowego =ustawienie w ciąg elementów zbioru n-elementowego

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

permutacja zbioru n-elementowego =ustawienie w ciąg elementów zbioru n-elementowego

Niech

P_n = liczba permutacji zbioru n-elementowego

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

permutacja zbioru n-elementowego =ustawienie w ciąg elementów zbioru n-elementowego

Niech

P_n = liczba permutacji zbioru n-elementowego

Przyjmijmy, że zliczamy permutacje zbioru

$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$

(każdy zbiór n-elementowy można utożsamić z tym zbiorem)

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n–elementowego

Tworzymy zależność rekurencyjną

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n−elementowego

Tworzymy zależność rekurencyjną

Wyznaczamy kilka pierwszych wyrazów ciągu P_n :

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n–elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n−elementowego

Tworzymy zależność rekurencyjną

Wyznaczamy kilka pierwszych wyrazów ciągu P_n :

$P_1 = 1$ bo (1)

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n-elementowego

Tworzymy zależność rekurencyjną

Wyznaczamy kilka pierwszych wyrazów ciągu P_n :

$P_1 = 1$ bo (1)

$P_2 = 2 = 2P_1$ bo (1,2), (2,1)

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n−elementowego

Tworzymy zależność rekurencyjną

Wyznaczamy kilka pierwszych wyrazów ciągu P_n :

$P_1 = 1$ bo (1)

$P_2 = 2 = 2P_1$ bo (1,2), (2,1)

$P_3 = 6 = 3P_2$ bo (1,2,3), (1,3,2), (3,1,2),
(2,1,3), (2,3,1), (3,2,1)

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n-elementowego

Tworzymy zależność rekurencyjną

Wyznaczamy kilka pierwszych wyrazów ciągu P_n :

$P_1 = 1$ bo (1)

$P_2 = 2 = 2P_1$ bo (1,2), (2,1)

$P_3 = 6 = 3P_2$ bo (1,2,3), (1,3,2), (3,1,2),
(2,1,3), (2,3,1), (3,2,1)

Stawiamy hipotezę, że

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } \quad P_1 = 1$$

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n−elementowego

Stawiamy hipotezę, że

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } \quad P_1 = 1$$

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n-elementowego

Stawiamy hipotezę, że

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } \quad P_1 = 1$$

Rzeczywiście: z każdej permutacji zbioru (n-1)-elementowego powstaje n permutacji zbioru n-elementowego,

każda z dokładnie jednej takiej permutacji

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n-elementowego

Stawiamy hipotezę, że

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } \quad P_1 = 1$$

Rzeczywiście: z każdej permutacji zbioru (n-1)-elementowego powstaje n permutacji zbioru n-elementowego,
każda z dokładnie jednej takiej permutacji

Mamy zatem równanie rekurencyjne.

Teraz trzeba je rozwiązać…

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n-elementowego

Rozwiązujemy równanie

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } \quad P_1 = 1$$

metodą naiwną:

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n-elementowego

Rozwiązujemy równanie

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } \quad P_1 = 1$$

metodą naiwną:

Zauważamy, że

$P_1 = 1 = 1!$ bo (1)

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n–elementowego

Rozwiązujemy równanie

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } \quad P_1 = 1$$

metodą naiwną:

Zauważamy, że

$P_1 = 1 = 1!$ bo (1)

$P_2 = 2 = 2P_1 = 2*1 = 2!$

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n-elementowego

Rozwiązujemy równanie

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } \quad P_1 = 1$$

metodą naiwną:

Zauważamy, że

$P_1 = 1 = 1!$ bo (1)

$P_2 = 2 = 2P_1 = 2*1 = 2!$

$P_3 = 6 = 3P_2 = 3*2*1 = 3!$

Zgadujemy, że

$$P_n = n! \text{ dla każdego } n \geq 1$$

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

P_n = liczba permutacji zbioru n–elementowego

Rozwiązujemy równanie

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } P_1 = 1$$

metodą naiwną:

Zauważamy, że

$P_1 = 1 = 1!$ bo (1)

$P_2 = 2 = 2P_1 = 2*1 = 2!$

$P_3 = 6 = 3P_2 = 3*2*1 = 3!$

Zgadujemy, że

$$P_n = n! \text{ dla każdego } n \geq 1$$

Teraz pozostaje to udowodnić

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } \quad P_1 = 1$$

Dowodzimy, że $T(n)$: $P_n = n!$ dla każdego $n \geq 1$

za pomocą indukcji matematycznej z krokiem jeden:

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } \quad P_1 = 1$$

Dowodzimy, że T(n): $P_n = n!$ dla każdego $n \geq 1$

za pomocą indukcji matematycznej z krokiem jeden:

Baza indukcji: T(1) prawda bo $P_1 = 1 = 1!$

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n–elementowego

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } \quad P_1 = 1$$

Dowodzimy, że T(n): $P_n = n!$ dla każdego $n \geq 1$

za pomocą indukcji matematycznej z krokiem jeden:

Baza indukcji: T(1) prawda bo $P_1 = 1 = 1!$

Krok indukcyjny: dla dowolnego $n>1$,

Założenie: $P_{n-1} = (n-1)!$

Teza: $P_n = n!$

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } P_1 = 1$$

Dowodzimy, że T(n): $P_n = n!$ dla każdego $n \geq 1$

za pomocą indukcji matematycznej z krokiem jeden:

Baza indukcji: T(1) prawda bo $P_1 = 1 = 1!$

Krok indukcyjny: dla dowolnego $n>1$,

Założenie: $P_{n-1} = (n-1)!$

Teza: $P_n = n!$

Dowód: $P_n = nP_{n-1} =$(z zał. ind.) $= n*(n-1)!=n!$ □

Przykład – wzór na liczbę permutacji zbioru n-elementowego

$$P_n = nP_{n-1}, \text{ dla } n > 1 \text{ oraz } P_1 = 1$$

Dowodzimy, że T(n): $P_n = n!$ dla każdego $n \geq 1$

za pomocą indukcji matematycznej z krokiem jeden:

Baza indukcji: T(1) prawda bo $P_1 = 1 = 1!$

Krok indukcyjny: dla dowolnego $n>1$,

Założenie: $P_{n-1} = (n-1)!$

Teza: $P_n = n!$

Dowód: $P_n = nP_{n-1}$ =(z zał. ind.) = $n*(n-1)!=n!$ □

Zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej, twierdzenie T(n) jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Chcemy dowieść, że wszystkie koty są czarne.

Niech T(n) = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” dla dowolnego $n \geq 1$.

Dowodzimy prawdziwości T(n) dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ za pomocą indukcji matematycznej

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Chcemy dowieść, że wszystkie koty są czarne.

Niech T(n) = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” dla dowolnego $n \geq 1$.

Założenie: W każdej grupie złożonej z n−1 kotów wszystkie są czarne. $(n>1)$

Teza: W każdej grupie złożonej z n kotów wszystkie są czarne. $(n>1)$

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Chcemy dowieść, że wszystkie koty są czarne.

Niech T(n) = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” dla dowolnego $n \geq 1$.

Założenie: W każdej grupie złożonej z n−1 kotów wszystkie są czarne. ($n>1$)

Teza: W każdej grupie złożonej z n kotów wszystkie są czarne. ($n>1$)

Dowód:

Weźmy *n* kotów. Oznaczmy je numerami 1,2,..., n−1,n.

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Chcemy dowieść, że wszystkie koty są czarne.

Niech $T(n)$ = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” dla dowolnego $n \geq 1$.

Założenie: W każdej grupie złożonej z $n-1$ kotów wszystkie są czarne. $(n>1)$

Teza: W każdej grupie złożonej z n kotów wszystkie są czarne. $(n>1)$

Dowód:

Weźmy *n* kotów. Oznaczmy je numerami $1,2,\ldots, n-1,n$.

Z zał. indukcyjnego koty o numerach $1,\ldots,n-1$ są czarne.

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Chcemy dowieść, że wszystkie koty są czarne.

Niech T(n) = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” dla dowolnego $n \geq 1$.

Założenie: W każdej grupie złożonej z $n-1$ kotów wszystkie są czarne. ($n>1$)

Teza: W każdej grupie złożonej z n kotów wszystkie są czarne. ($n>1$)

Dowód:

Weźmy *n* kotów. Oznaczmy je numerami 1,2,…, $n-1$,n.

Z zał. indukcyjnego koty o numerach 1,…,$n-1$ są czarne.

Z zał. indukcyjnego koty o numerach 2,…,n są czarne.

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Chcemy dowieść, że wszystkie koty są czarne.

Niech T(n) = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” dla dowolnego $n \geq 1$.

Założenie: W każdej grupie złożonej z n−1 kotów wszystkie są czarne. $(n>1)$

Teza: W każdej grupie złożonej z n kotów wszystkie są czarne. $(n>1)$

Dowód:

Weźmy *n* kotów. Oznaczmy je numerami 1,2,…, n−1,n.

Z zał. indukcyjnego koty o numerach 1,…,n−1 są czarne.

Z zał. indukcyjnego koty o numerach 2,…,n są czarne.

Czyli wszystkie *n* kotów jest czarnych □

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie T(n) = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” jest prawdziwe dla każdej…

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie T(n) = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” jest prawdziwe dla każdej…

CHWILA !!!!

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie T(n) = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” jest prawdziwe dla każdej…

CHWILA !!!!

A bazę indukcji to kto sprawdzi ?

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie T(n) = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” jest prawdziwe dla każdej…

CHWILA !!!!

A bazę indukcji to kto sprawdzi ?

Baza indukcji: T(1) = w każdej grupie złożonej z jednego kota wszystkie są czarne

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie T(n) = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” jest prawdziwe dla każdej…

CHWILA !!!!

A bazę indukcji to kto sprawdzi ?

Baza indukcji: T(1) = w każdej grupie złożonej z jednego kota wszystkie są czarne

TO PRZECIEŻ NIEPRAWDA !!!!

Przykład „dowodu” indukcyjnego

Zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie T(n) = „w każdej grupie złożonej z *n* kotów wszystkie są czarne” jest prawdziwe dla każdej…

CHWILA !!!!

A bazę indukcji to kto sprawdzi ?

Baza indukcji: T(1) = w każdej grupie złożonej z jednego kota wszystkie są czarne

TO PRZECIEŻ NIEPRAWDA !!!!

Czyli nie da się tego udowodnić za pomocą indukcji matematycznej.

Wniosek

Należy pamiętać o sprawdzeniu czy prawdziwa jest baza indukcji !!

Inaczej uda się „wykazać”, że

Wszystkie dzieci są grzeczne,
Wszystkie kobiety są piękne,
Itp..

Metoda iteracyjna

- Rozwiń (iteruj) rekurencję aż do otrzymania sumy składników zależnych tylko od *n* i warunków brzegowych

- Oblicz rozwiązanie obliczając sumę otrzymanych składników.

Metoda iteracyjna – przykład

Niech $a_n = 2\,a_{n-1}$ dla n>0 oraz $a_0=1$.

Metoda iteracyjna – przykład

Niech $a_n = 2\, a_{n-1}$ dla n>0 oraz $a_0=1.$

Wtedy $a_n = 2 \cdot a_{n-1} = 2 \cdot 2 \cdot a_{n-2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_{n-3}$
$= \ldots = \underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ razy}} \cdot a_0 = 2^n \cdot 1 = 2^n$

Metoda uniwersalna

- Znajdź twierdzenie, w którym opisana jest postać rozwiązania danego równania rekurencyjnego

Metoda uniwersalna

- Znajdź twierdzenie, w którym opisana jest postać rozwiązania danego równania rekurencyjnego
- albo sam udowodnij takie twierdzenie wykorzystując *funkcje tworzące*

Równanie rekurencyjne liniowe k-tego rzędu

$a_n = A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2} + \ldots + A_k a_{n-k}$ dla $n \geq k$,
gdzie A_1 , A_2 ,…, A_k są pewnymi stałymi oraz wartości a_0 , a_1 ,…, a_{k-1} są dane.

Np.

$a_n = 4a_{n-1} + 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$ dla $n \geq 3$,

$a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$.

Twierdzenie o postaci rozwiązania równania rekurenycjnego liniowego

Jeżeli ciąg dany jest równaniem

$a_n = A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2} + \ldots + A_k a_{n-k}$ dla $n \geq k$,

gdzie $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są pewnymi stałymi oraz wartości $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ są dane,

to $a_n = c_1 (r_1)^n + \ldots + c_k (r_k)^n$,

gdzie $r_1, \ldots, r_k$ są pierwiastkami równania charakterystycznego postaci:

$r^k = A_1 r^{k-1} + A_2 r^{k-2} + \ldots + A_{k-1} r + A_k$

($a_{n-i} \leftrightarrow r^{k-i}$ dla $i=0,\ldots,k$)

a stałe $c_1,\ldots,c_k$ wyznaczamy korzystając z warunków brzegowych

Twierdzenie o postaci rozwiązania równania rekurenycjnego liniowego 1-go rzędu

Twierdzenie 1: Jeżeli ciąg dany jest równaniem

$a_n = A\, a_{n-1} + B$ dla $n \geq 2$,

gdzie A, B są pewnymi stałymi oraz

wartości a_0 , a_1 są dane,

to

$$a_n = c \cdot A^n + d,$$

gdzie stałe c, d wyznaczamy z układu równań:

$a_0 = c + d$

$a_1 = c \cdot A + d$

Przykład – wieże Hanoi

$H(n)=2H(n-1)+1$ dla $n>1$ oraz $H(1)=1$

Korzystamy z Twierdzenia 1 (dla A=2):

$$H(n)=c\cdot 2^n + d$$

Przykład – wieże Hanoi

$H(n)=2H(n-1)+1$ dla $n>1$ oraz $H(1)=1$

Korzystamy z Twierdzenia 1 (dla A=1):

$$H(n)=c\cdot 2^n + d$$

Z warunków brzegowych:

$H(1)=1$ oraz $H(2)=2\cdot 1+1=3$

otrzymujemy:

$H(1)=1= c\cdot 2 + d$

$H(2)=3= c\cdot 2^2 + d$

Przykład – wieże Hanoi

$H(n)=2H(n-1)+1$ dla $n>1$ oraz $H(1)=1$

Korzystamy z Twierdzenia 1 (dla A=1):

$$H(n)=c\cdot 2^n + d$$

Z warunków brzegowych:

$H(1)=1$ oraz $H(2)=2 \cdot 1+1=3$

otrzymujemy:

$H(1)=1= c\cdot 2 + d$

$H(2)=3= c\cdot 2^2 + d$

i stąd

$$c=1 \quad d=-1$$

czyli ostatecznie: $H(n)= 2^n -1$

Przykład – wieże Hanoi

Mamy:

H(n) = liczba ruchów potrzebnych do przełożenia *n* krążków $= 2^n - 1$

Legenda głosi, że tybetańscy mnisi w świątyni Brahmy rozwiązują tą zagadkę dla n=64 krążków a kiedy skończą nastąpi koniec świata

$H(64) = 2^{64} - 1$ $= 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$ (blisko 18 i pół tryliona)

Przykład – wieże Hanoi

Gdyby mnisi przekładali 1 krążek co sekundę, to przeniesienie 64 krążków zajęłoby im

584 542 miliardów lat

(Wszechświat ma około 13,7 miliarda lat)

Twierdzenie o postaci rozwiązania równania rekurenycjnego liniowego 2-go rzędu

Twierdzenie 2 : Jeżeli ciąg dany jest równaniem

$a_n = A\, a_{n-1} + B\, a_{n-2}$ dla $n \geq 2$,

gdzie A, B są pewnymi stałymi oraz wartości a_0 , a_1 są dane, to

$$a_n = c_1 (r_1)^n + c_2 (r_2)^n$$

gdzie r_1, r_2 są pierwiastkami równania charakterystycznego postaci:

$r^2 = A \cdot r + B$ $\quad$ ($a_{n-i} \leftrightarrow r^{2-i}$ dla $i=0,1,2$)

a stałe c_1 , c_2 wyznaczamy z układu równań:

$$a_0 = c_1 + c_2$$
$$a_1 = c_1 \cdot r_1 + c_2 \cdot r_2$$

Przykład – ciąg Fibonacciego

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geq 2$ oraz $F_0 = F_1 = 1$

Korzystamy z Twierdzenia 2 (dla $A=B=1$):

Równanie charakterystyczne ma postać:

$$r^2 = r + 1 \text{ czyli } r^2 - r - 1 = 0$$

Pierwiastkami tego równania są liczby:

$r_1 = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ $r_2 = \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\text{Zatem } F_n = c_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Przykład – ciąg Fibonacciego

Zatem $F_n = c_1 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + c_2 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$

Z warunków brzegowych mamy

$$\begin{cases} F_0 = 1 = c_1 + c_2 \\ F_1 = 1 = c_1 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases},$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \; c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Zatem, ostatecznie

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$$

Rekurencja a nierekurencja

Obliczanie n–tej liczby Fibonacciego F_n :

rekurencyjnie:

F1(n)

1. Jeśli $n<2$ to $F1(n) = 1$
2. Jeśli $n \geq 2$, to $F1(n)=F1(n-1)+F1(n-2)$

nierekurencyjnie:

F2(n)

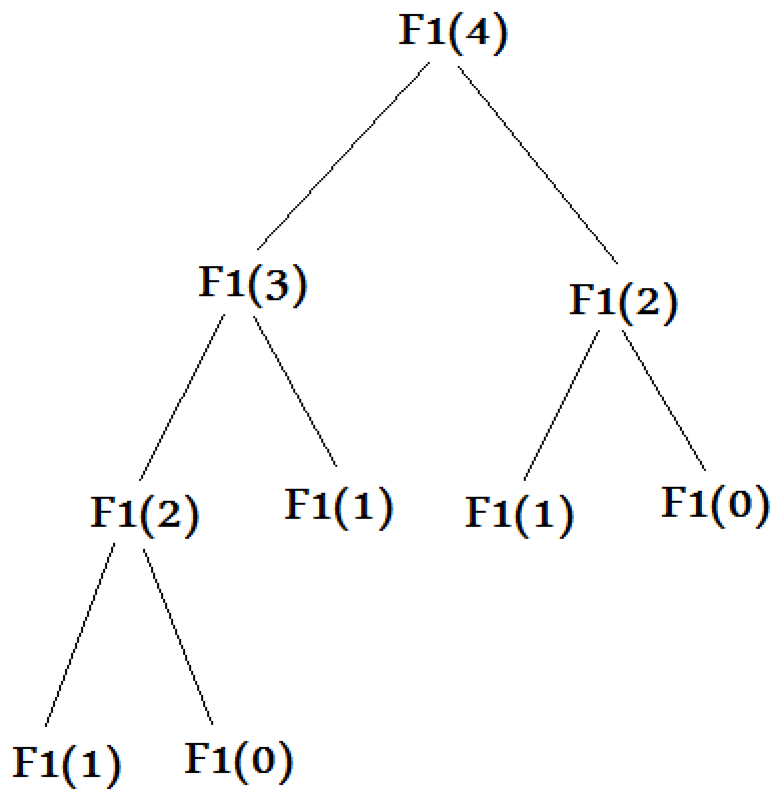
1. Jeśli ($n=0$ LUB $n=1$), to $F2(n)=1$
2. Jeśli $n \geq 2$, to $f1=1$, $f2=1$ oraz

dla $i=2,\ldots,n$

$F2(i)=f1+f2$; $f2=f1$; $f1=F2(i)$;

Rekurencja a nierekurencja

Procedura rekurencyjna będzie wielokrotnie liczyła te same wartości F1(k).



Rekurencja a nierekurencja

Procedura nierekurencyjna policzy wszystkie kolejne liczby Fibonacciego od F_o do F_n ale każdą z nich tylko raz.

Zatem szybsza (i to znacznie) będzie procedura nierekurencyjna.

TO JUŻ JEST

- TO JUŻ JEST KONIEC