

Nierówności

Koło robi kursy (darmowe) na przełomie marca/kwietnia do matury rozszerzonej z matematyki (kilka spotkań na MiNI PW) w weekendy:

<https://www.facebook.com/KNM.PW/mentions/>

Udowodnij nierówność $a^2 + 4b^2 \geq 4ab$.

$$a^2 + 4b^2 - 4ab \geq 0$$

$$(a-2b)^2 \geq 0$$

Leva strona jest kwadratem więc nierówność jak najbardziej jest spełniona.

Często możemy wyrazić funkcje kwadratowe!

$$a^2 - 4ab + 4b^2 \geq 0$$

← to możemy to rozważyć
jako funkcję zmiennej np. a .

$$1 \cdot a^2 + (-4b) \cdot a + (4b^2) \geq 0$$

$$\Delta_a = (-4b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4b^2 = 16b^2 - 16b^2 = 0$$



← zawsze wartości nieujemne,
niec prawda jest 12e

$$a^2 - 4ab + 4b^2 \geq 0$$

(bo parabole se nad/na osi OX)



Udowodnij, że $t + \frac{9}{t} \geq 6$ dla $t > 0$

Udowodnij, że $2a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

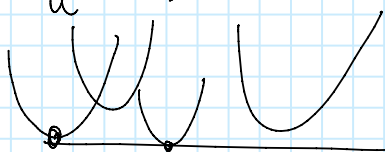
~~$$(2a+b)(a+b) = 2a^2 + 2ab + ab + b^2$$~~

$$2 \cdot a^2 + 2b \cdot a + b^2 \geq 0$$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

„a”
„b”
„c”
dodatne,
więc ramiona
paraboli U

$$\Delta_a = (2b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot b^2 = 4b^2 - 8b^2 = -4b^2 \leq 0$$



← zawsze wartości nieujemne,
więc prawdziwa jest że

$$2a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$$

(I)

$$2a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + (a+b)^2 \geq 0$$

Lewa strona to suma kwadratów, więc jest nieujemna.

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + 3b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 4ab + 4b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + ab + b^2 \geq 0$$

$\cdot 2$

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2ab + 2b^2 &\geq 0 \\ a^2 + (a^2 + 2ab + b^2) + b^2 &\geq 0 \\ a^2 + (a+b)^2 + b^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a^2 + a^2 + 4ab + 4b^2 &\geq 0 \\ 2a^2 + (a+2b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Udowodnij: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

~~(aktywne)~~
(konkursowe)

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc &\geq 0 \quad / \cdot 2 \\ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc &\geq 0 \\ a^2 + b^2 + 2c^2 + (a^2 - 2ab + b^2) - 2ac - 2bc &\geq 0 \\ (a-b)^2 + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) &\geq 0 \\ (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

OK

Udowodnij, że dla $a, b \in \mathbb{R}$: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$

Podnosimy stronami do kwadratu:

dobrya wier.

Podnosimy stronami do kwadratu:

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

BARDZO ZŁE!

dobry nier.

$$\sqrt{1 \geq -2}$$

$$1^2 \geq (-2)^2 \quad |()^2$$

$$1 \geq 4$$

zła nierówność

Reguła:

Żeby można było podnieść stronami do kwadratu, MUSIMY zagwarantować to, żeby obie strony nierówności były DODATNIE (lub równe 0), czyli NIEUJEMNE!

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

• Jeśli $\frac{a+b}{2} < 0$ (tzn. prawa strona ujemna), to nierówność jest prawdziwa, bo lewa strona jest nieujemna (a zawsze $0 \geq -$)

• Jeśli $\frac{a+b}{2} \geq 0$, to podnosimy stronami do kwadratu:

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \quad / \cdot 4$$

$$2a^2+2b^2 \geq a^2+2ab+b^2$$

$$a^2-2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

OK

[Signature]

$$\sqrt{x^2} = x$$

BARDZO ZŁE!

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\log_{21}(x^2) = 2 \cdot \log_{21}|x|$$

$$\log_{21} x^2 = 2 \cdot \log_{21} x$$

BARDZO ŁE!

$$\rightarrow \log_{21} (-3)^2 = 2 \cdot \log_{21} (-3)$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0$, $y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

oo

Udowodnij, że

$$8^{50} - 2^{145}$$

jest podzielna przez 31.

$$\parallel$$

$$(2^3)^{50} - 2^{145} = 2^{150} - 2^{145} =$$

$$= 2^{145} (2^5 - 1) =$$

$$= 2^{145} (32 - 1) = 2^{145} \cdot 31$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$x + x^2 = x(1 + x)$$

(Bardzo częsty trik z wyciąganiem przed nawias!)

Wykaż, że liczba $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$ jest podzielna przez 6.

$$\textcircled{I} \quad 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{99})$$

Czyli na pewno dzieli się przez 3.

suma stu lub nieparzystych,
niec jest parzysta, więc dzieli
się przez 2

więc dzieli się przez 6.

Wykaż, że liczba $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$ jest podzielna przez 6.

$$\textcircled{II} \quad \left(\frac{1}{1} \dots \frac{1}{n}\right) \text{ sumy ciągu geometrycznego: } \dots$$

II) (2) sumy ciągu geometrycznego:
 $a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$$3 + 3^2 + \dots + 3^{100} = 3 \cdot \frac{1-3^{100}}{1-3} = 3 \cdot \frac{3^{100}-1}{3-1} = \frac{3}{2} \cdot (3^{100}-1)$$

(2)

wracaj więc z tego już nie wyjdzie

4 Wykaż, że liczba $a = 3^{27} + 3^{29}$ jest podzielna przez 30.

Wykaż, że liczba $10^{2026} - 4$ jest podzielna przez 12, ale nie jest podzielna przez 9.

$$(2 \cdot 5)^{2026} - 4 = \underbrace{2^{2026} \cdot 5^{2026}}_{\text{dzieli się przez 4}} - \underbrace{4}_{\text{to też}} \rightarrow \text{więc ta liczba dzieli się przez 4,}$$

$$\underbrace{10 \dots 0}_{2026} - 4 = \underbrace{9 \dots 9}_{2025} 6 \rightarrow \text{dzieli się przez 4}$$

suma cyfr tej liczby dzieli się przez 3 i nie dzieli się przez 9.

Udowodnij, że po wymnożeniu kolejnych liczb naturalnych od 1 do 30, czyli po wykonaniu działania $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30$, otrzymamy liczbę, która kończy się dokładnie 7 zerami.

skąd się biorą "5" w rozkładzie na czynniki pierwsze?

5, 10, 15, 20, 25, 30, więc "5" mamy: siedem
 $5 \cdot 5$

dwójek mamy w rozkładzie dokładnie:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30

ile "2"? 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1 $\rightarrow$ w sumie ...

W rozkładzie na czynniki pierwsze mamy dokładnie siedem "5" i co najmniej siedem "2", więc przy iloczynie otrzymamy liczbę kończącą się na dokładnie siedem zer (zauważmy, że jedno zero bierze się wyłącznie z przemnożenia jednej piątki i jednej jedynki w rozkładzie na czynniki pierwsze).

Rzucamy dwoma kostkami sześciennymi. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma kwadratów wyrzuconych oczek nie dzieli się przez 2.

Rzucamy dwoma kostkami sześciennymi. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma kwadratów wyrzuconych oczek nie dzieli się przez 3.

$$\overline{\Omega} = 6 \cdot 6 = 36$$

S - suma kwadratów

$1,1$ $S=2$ ✓	$1,2$ $S=5$ ✓	$1,3$ $S=10$ ✓	$1,4$ $S=17$ ✓	$1,5$ $S=26$ ✓	$1,6$ $S=37$ ✓
...				$2,5$	
✓					
✓					
✓					
✓	$3,2$				
✓					$6,6$ $S=72$ ✗

z symetrii:

Uzasadnij, że $2^a + 2^{-a} \geq 2$

$$2^a + \frac{1}{2^a} \geq 2$$

$$\cdot 2^a$$

$$4^a + 1 \geq 2 \cdot 2^a$$

$$4^a + 1 \geq 2^{a+1}$$

$$(2^2)^a + 2^0 \geq 2^{a+1}$$

$$2^{2a} + 2^0 \geq 2^{a+1}$$

$$2^{2a} - 2^{a+1} + 1 \geq 0$$

$$2^{2a} - 2 \cdot 2^a + 1 \geq 0$$

$$(2^a)^2 - 2 \cdot 2^a + 1 \geq 0$$

$$(2^a - 1)^2 \geq 0 \quad \text{ok}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\begin{aligned} 2^a &\geq 2^b \\ a &\geq b \end{aligned}$$



Warto: jeśli się coś powtórza (szczególnie w formułach i nierównościach), to próbujmy za to coś podkresić!

$$2^a + \frac{1}{2^a} \geq 2$$

$$2^a + \frac{1}{2^a} \geq 2$$

Podstawmy $t = 2^a$, $t > 0$

$$t + \frac{1}{t} \geq 2 \quad / \cdot t$$

$$t^2 + 1 \geq 2t$$

$$t^2 - 2t + 1 \geq 0$$

$$(t-1)^2 \geq 0 \quad \text{ok}$$

Uzasadnij, że

$$\log_5 6 + \log_6 5 > 2$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to:

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

W szczególności:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

- Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b :

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0$, $y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\begin{aligned} \log_a (x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y & \log_a x^r &= r \cdot \log_a x \\ \log_a \left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y \end{aligned}$$

$$\log_5 6 + \log_6 5 > 2$$

$$\log_5 6 + \frac{1}{\log_5 6} > 2$$

$$t = \log_5 6 > 0$$

$$t + \frac{1}{t} > 2 \quad / \cdot t$$

$$t^2 + 1 > 2t$$

$$t^2 - 2t + 1 > 0$$

$$(t-1)^2 > 0$$

Jeśli okazałoby się, że $t \neq 1$, to jest koniec

$$\log_5 6 \neq 1$$

$$\log_5 6 \neq \log_5 5$$

$$6 \neq 5 \quad \text{ok}$$

$$\log_5 6 \neq \log_5 1$$

6 ≠ 1 ok

~~Rozwiąz~~

$$(x^2 - 6x)^2 + 2(x^2 - 6x) = 15$$

$$t = x^2 - 6x$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$\Delta_t = \dots$$

$$t = 3 \quad \vee \quad t = -5$$

$$x^2 - 6x = 3 \quad \vee \quad x^2 - 6x = -5$$

$$x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$\Delta_x = \dots$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = \dots$$

$$\underline{x = 1, x = 5}$$

