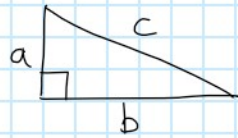


2025.11.22-2

sobota, 22 listopada 2025

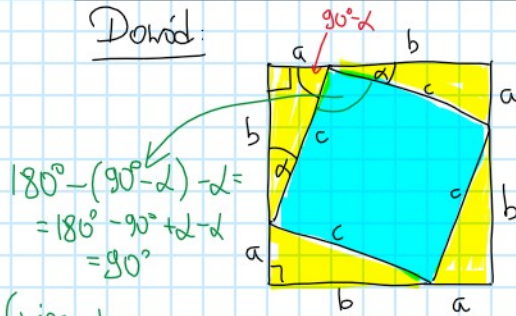
Geometria

Tw. Pitagorasa



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dowód:



(więc ten niebieski romb to kwadrat)

Pole kwadratu (tego dużego)

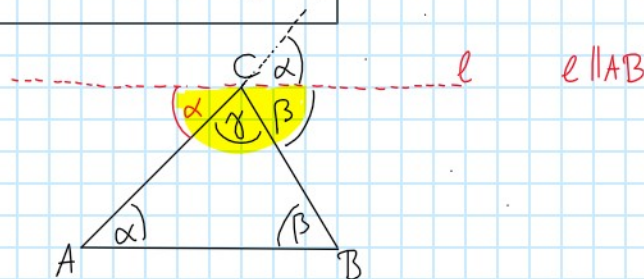
$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2} \quad \text{koniec dowodu}$$

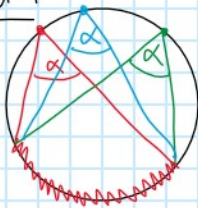
Tw. Suma kątów w Δ to 180°

Dowód:

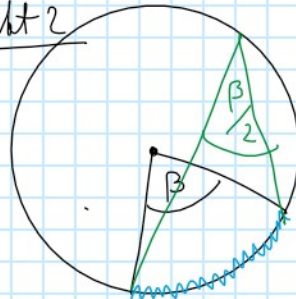


Zatem $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Fakt 1

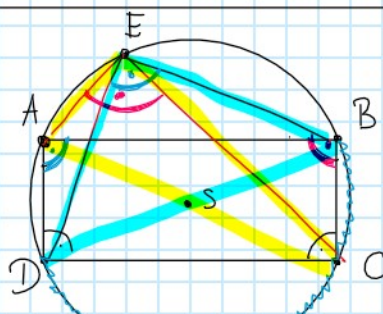


Fakt 2



Mamy okrąg opisany na prostokącie ABCD. Mamy punkt E, różny od A, B, C, D, który leży na tym okręgu. Uzasadnij, że suma kwadratów odległości punktu E od wszystkich wierzchołków prostokąta jest stała.

Dowód:

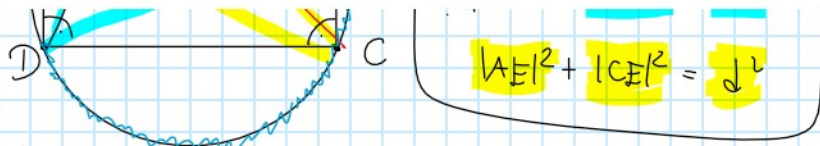


$$|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = \text{const}$$

2 Pitagorasa

$$|BE|^2 + |DE|^2 = d^2$$

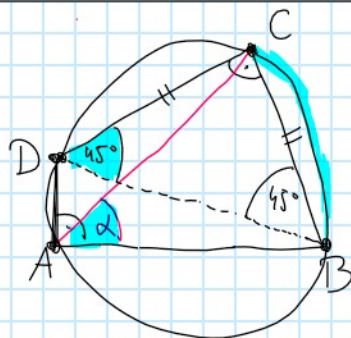
$$|AE|^2 + |CE|^2 = d^2$$



$d = |DB|$ (średnica)

Więc $|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = d^2 + d^2 = 2d^2 = \text{const}$

Mamy $ABCD$, $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$; $|BC| = |CD|$.
Udowodnij, że AC to dwusieczna kąta $\angle DAB$.

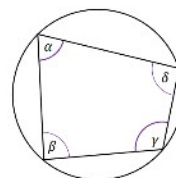


$\alpha = 45^\circ$

• Okrąg opisany na czworokącie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180° .

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= \beta + \delta \\ \alpha + \gamma &= 180^\circ \quad \beta + \delta = 180^\circ \end{aligned}$$

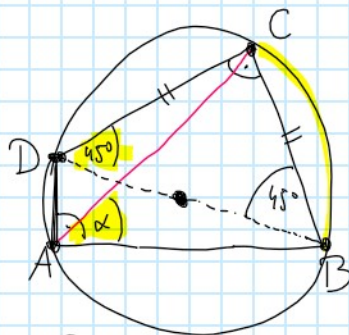


Zatem możemy opisać okrąg na $ABCD$.

2 kątów wpisanych $\alpha = 45^\circ$. KONIEC

INNE WZW.:

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym znajduje się w połowie jego przeciwprostokątnej. Zatem w naszym wypadku środek okręgu opisanego na ABD i na BCD jest tym samym punktem i ten okrąg ma tę samą średnicę (BD). Zatem można narysować okrąg przechodzący przez $ABCD$.

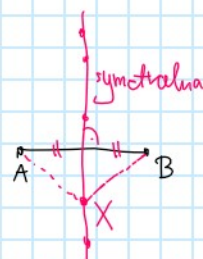


Poten z kątów wpisanych $\alpha = 45^\circ$

Symetralna odcinka - prosta prostopadła do odcinka, dzieląca go na pół.

Bardzo ważne

Symetralna odcinka składa się wyłącznie z pkt, które są równo oddalone od końców odcinka.



Nie ma we wzorach minimalnych

! Symetralna odcinka składa się wyłącznie z pkt, które są równo oddalone od końca odcinka. Nie ma we wzorach maturalnych

Zadanie: Znajdź równanie symetralnej odcinka $A = (1, 2)$
 $B = (4, 9)$.

Rozw.: I metoda

1. Znajdujemy równanie prostej przechodzącej przez A i B (wzór na karcie maturalnej, albo...)
2. Znajdujemy środek odcinka AB.
3. Znajdujemy prostą prostopadłą do prostej z 1. która przechodzi przez środek AB.

I metoda $X = (x, y)$ - pkt z symetralnej

$X = (x, y)$
 $A = (1, 2)$

$$|XA| = |XB|$$

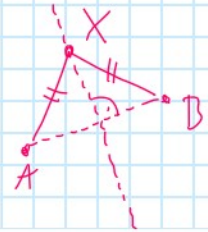
$$\sqrt{(1-x)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{(4-x)^2 + (9-y)^2}$$

$$1 - 2x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = 16 - 8x + x^2 + 81 - 18y + y^2$$

$$6x + 14y + 5 = 97$$

$$6x - 14y - 92 = 0 \quad / : 2$$

$$3x - 7y - 46 = 0 \quad \text{równanie symetralnej.}$$



12

Długość odcinka

Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Własności (nie ma we wzorach)

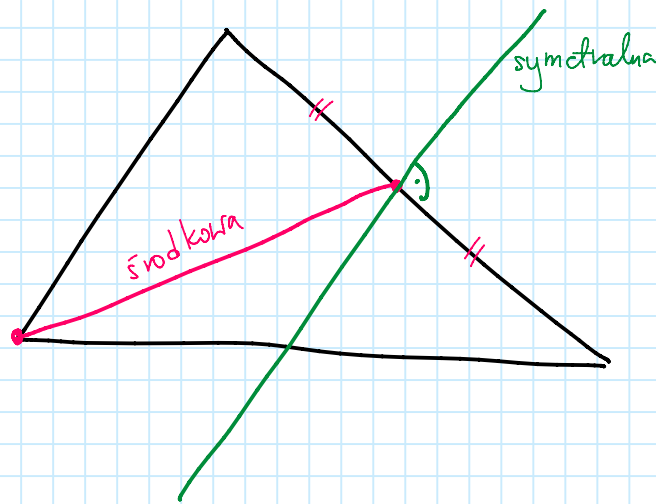
W trójkącie wszystkie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie (ten punkt to środek okręgu opisanego). Nie ma we wzorach

W trójkącie wszystkie dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie (ten punkt to środek okręgu wpisanego). Nie ma we wzorach

W trójkącie wszystkie jego środkowe (odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku) przecinają się w jednym punkcie - jest to środek ciężkości trójkąta. (jest wzór na karcie)

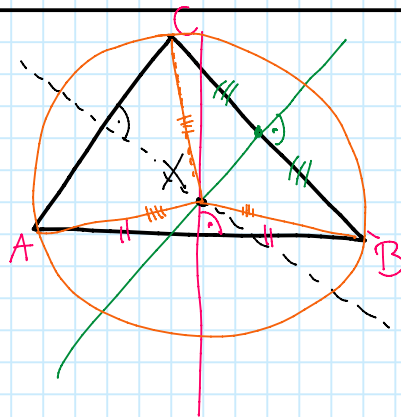
W trójkącie wszystkie jego wysokości przecinają się w jednym punkcie (ciekawostka: ten punkt nazywa się ortocentrum). Za bardzo nieprzydatne.

Dodatkowo: środek okręgu wpisanego w dowolny wielokąt leży na przecięciu się jego dwusiecznych, a środek okręgu opisanego leży na przecięciu się jego symetralnych (NIE ZAWSZE TAKIE PUNKTY ISTNIEJĄ)



W trójkącie wszystkie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie (ten punkt to środek okręgu opisanego).

Dowód:



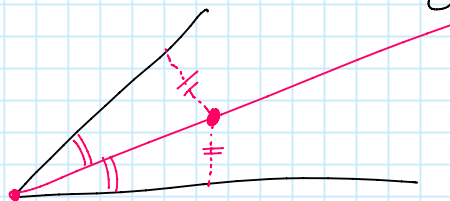
Prowadzimy symetralną AB (czerwona prosta), symetralną BC (zielona prosta). Te proste przecinają się w punkcie X. Zauważmy, że X jest równooddalony od A i B (bo jest na czerwonej prostej) oraz od B i C (bo jest na zielonej prostej), więc X jest równooddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta, więc w szczególności jest równooddalony od A i C (tzn. leży też na symetralnej odcinka AC).

Zatem wszystkie symetralne przecinają się w jednym punkcie.

Punkt X, jako punkt równooddalony od wszystkich wierzchołków, jest też środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

KONIEC

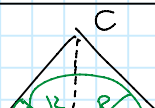
Dwusieczna to półprosta, dzieląca kąt na połowy.

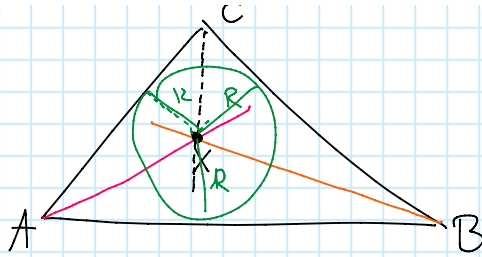


! Bardzo ważne.

Dwusieczna to zbiór punktów, które są równooddalone od ramion kąta

W trójkącie wszystkie dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie (ten punkt to środek okręgu wpisanego). **Nie ma we wzorach**





Prowadzimy dwusieczne kąta A i kąta B. Te dwusieczne przecinają się w punkcie X. Ten X ma taką własność, że jest równooddalony od AC i od AB (bo leży na czerwonej prostej) oraz jest równooddalony od AB i BC (bo leży na pomarańczowej). Zatem X jest równooddalony od AC i BC, więc leży też na dwusiecznej kąta C.

Zatem wszystkie dwusieczne przecinają się w jednym punkcie.

Ponadto X jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.