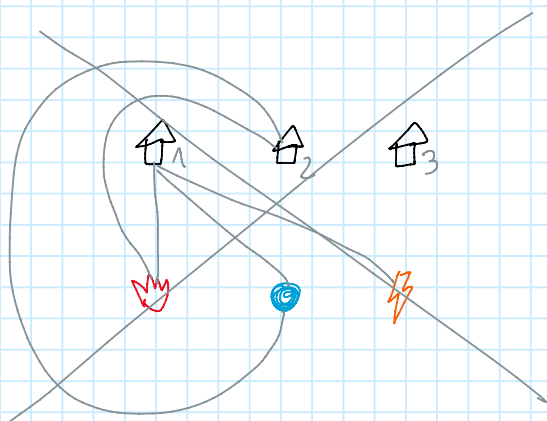
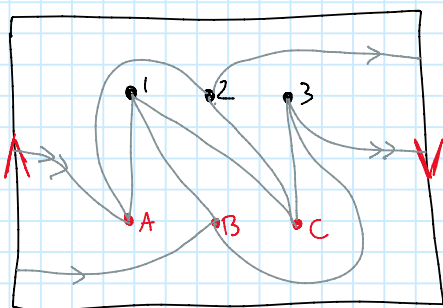
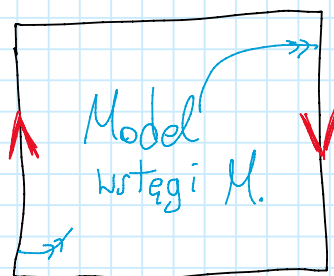
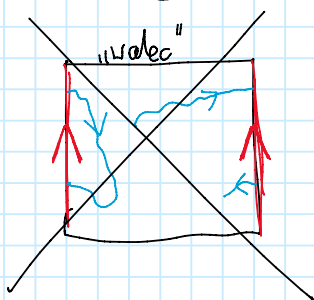




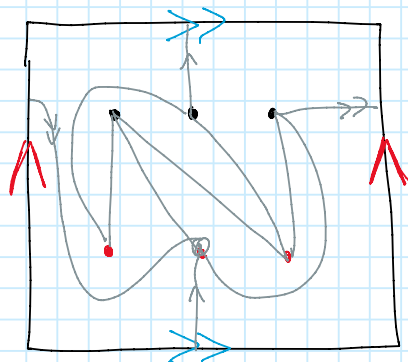
Chcemy połączyć te trzy domki ze źródłami tak, żeby linie się nie przecinały.

wie da się?

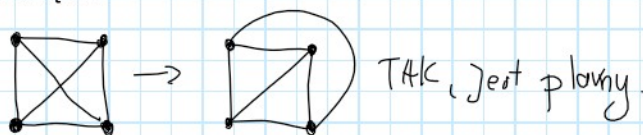
Ale czy się da na wstędze Möbiusa?



Torus ("pączek z dziurką")



Graf planarny nazywamy taki graf (połączenie kropek kreskami), że da się go narysować na płaszczyźnie bez przecinania się krawędzi.



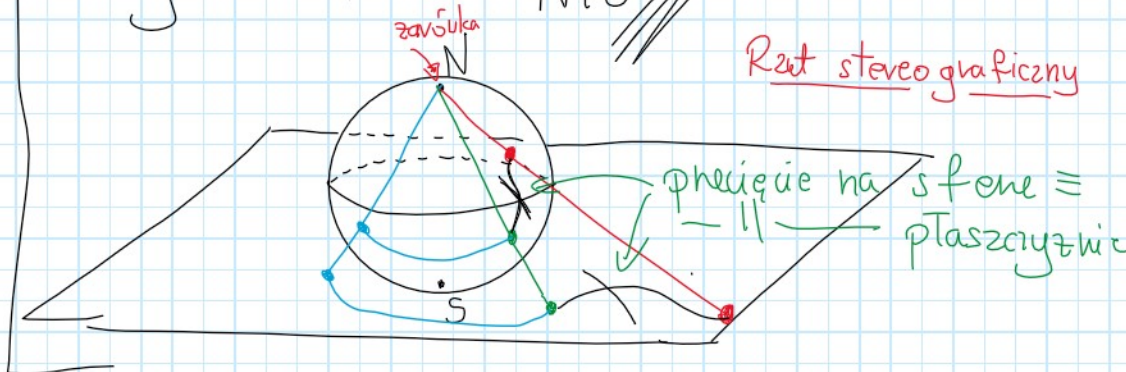
Twierdzenie. Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera w sobie takich grafów:



A czy na sferze? **NIE**

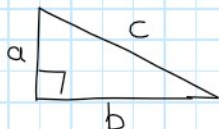
graf jest planarny na płaszczyźnie $\Leftrightarrow$ na sferze

Rzut stereograficzny



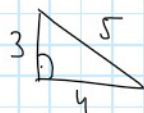
Geometria

Tw. Pitagorasa



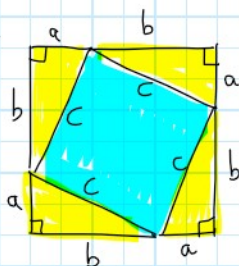
$$a^2 + b^2 = c^2$$

w Egipcie



używano do zaznaczania kąta prostego

Dowód:



Pole dużego kwadratu

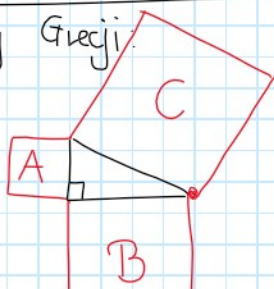
$$P = (a+b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

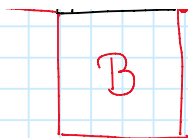
Koniec dowodu tw. Pitagorasa

W starożytnej Grecji:

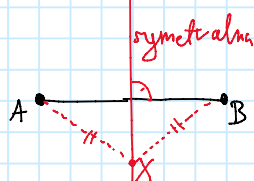


tw. Pitagorasa:

$$A + B = C$$



Symetralna odcinka to prosta prostopadła do niego dzieląca go na połowy.



Bardzo ważne: Symetralna jest zbiorem punktów, które są równooddalone od końców odcinka.

Zadanie. Znajdź symetralną odcinka $A=(1,2)$, $B=(4,7)$.

Rozw. (I)

1. Znajdujemy równanie prostej między A i B.
2. Znajdujemy środek odcinka AB.
3. Znajdujemy równanie prostej prostopadłej do prostej z punktu 1, która przechodzi przez środek AB.

(II) Niech $X=(x,y)$ - punkt z symetralnej

$$|AX|=|BX|$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-7)^2} \quad |^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 14y + 49$$

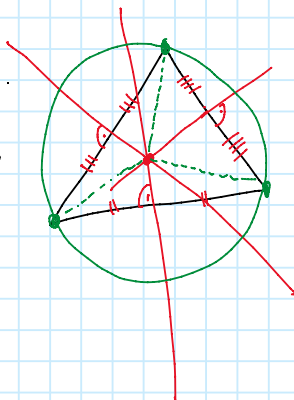
$$6x + 10y + 5 - 16 - 49 = 0$$

$$6x + 10y - 60 = 0 \quad /: 2$$

$$3x + 5y - 30 = 0 \quad \text{równanie symetralnej}$$

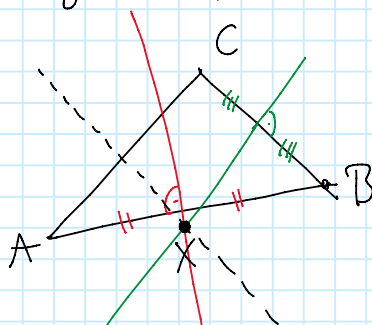


Tw. (o symetralnych w Δ).
Symetralne w Δ przecinają się w jednym punkcie
(jest to środek okręgu opisanego na Δ)

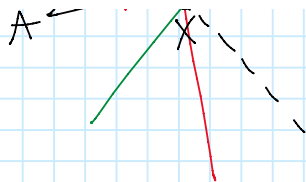


(?)
Tego nie ma w kwanie
wzłów matematycznych

Dowód:



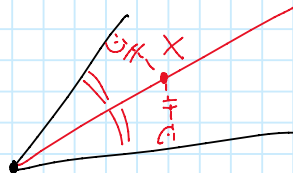
Rysujemy symetralną AB (czerwona) oraz symetralną BC (zielona). One się przecinają w jakimś punkcie (X). Skoro X należy do czerwonej prostej, to jest równoodległy od A i od B, a skoro X też należy do zielonej prostej, to jest równoodległy od B i C. Zatem X jest równoodległy od A i C, tzn. że leży na symetralnej odcinka AC.



zielonej prostej, to jest równoodległy od B i C. Zatem X jest równoodległy od A i C, tzn. że leży na symetralnej odcinka AC.

Zatem wszystkie symetralne przecinają się w jednym punkcie - ten punkt jest równooddalony od każdego z wierzchołków trójkąta, więc jest to środek okręgu opisanego na trójkącie.

Dwusieczna kąta (półprosta dzieląca kąt na połowy)

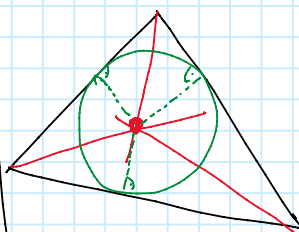
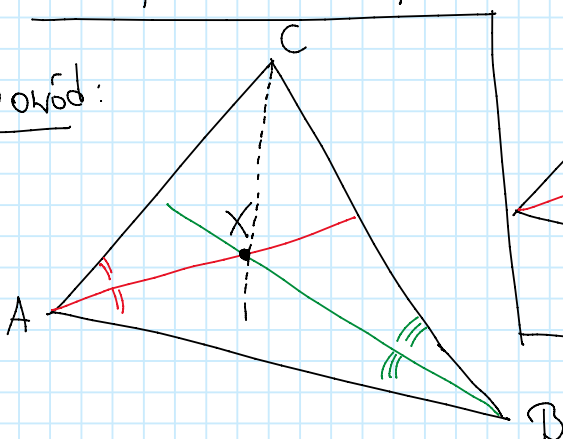


Bardzo ważne!

Dwusieczna kąta to zbiór punktów równooddalonych od ramion kąta!

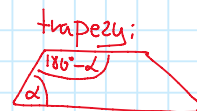
Tw. W trójkącie wszystkie dwusieczne przecinają się w jednym punkcie (ten punkt to środek okręgu wpisanego w Δ .)

Dowód:



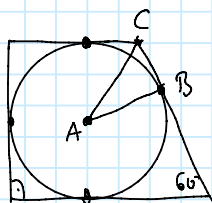
Nie ma tego wprost napisanego we wzorach matematycznych!

Rysujemy dwusieczną z kąta A i z kąta B w naszym trójkącie. One się przecinają w punkcie X. Ten punkt jest równooddalony od boku AB i od AC (bo należy do dwusiecznej kąta A) oraz ten punkt jest równooddalony od boku AB i od boku BC (bo należy do dwusiecznej kąta B). Zatem X jest równooddalony od wszystkich boków trójkąta, więc w szczególności jest równooddalony od AC i od BC, więc leży na dwusiecznej kąta C. Zatem wszystkie dwusieczne przecinają się w jednym punkcie i skoro ten punkt jest równooddalony od każdego z boków, to jest to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.

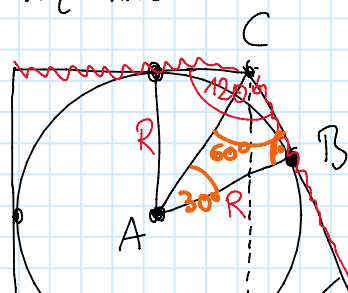


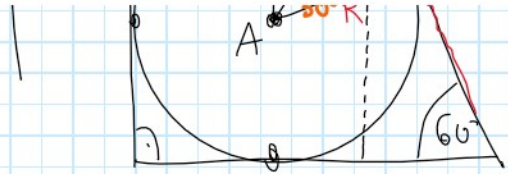
Zadanie

Znajdź kąty ΔABC .
(B - pkt styczności)



Rozwiązanie





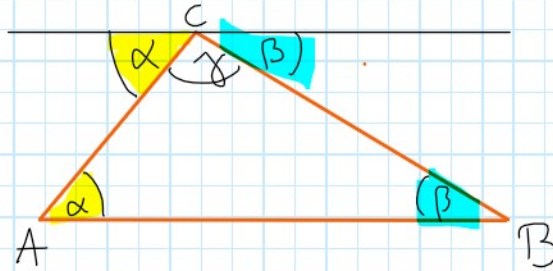
Kąt przy C w trapezie to oczywiście 120 stopni.

Punkt A, jako środek okręgu wpisanego w figurę, jest punktem na przecięciu wszystkich dwusiecznych, czyli w szczególności jest punktem na dwusiecznej kąta C, więc kąt ACB to 60 stopni. Punkt B jest punktem styczności, więc kąt CBA to 90 stopni, więc kąt CAB to $180 - 90 - 60 = 30$ stopni.

Twierdzenie. Suma kątów wewnętrznych w trójkącie to 180 stopni.

Dowód:

Prowadzimy prostą przechodzącą przez C i równoległą do AB. Wtedy rysujemy kąty odpowiadające kątom wewnętrznym naszego trójkąta jak na poniższym rysunku:



Wtedy $\alpha + \beta + \gamma$ to 180 stopni, jako kąty tworzące kąt półpełny.

Koniec dowodu.

znak końca
dowodu / halmos
(ang. tombstone)
hagrobek

c.n.d.
c.b.d.u.
C.Z.U.
q.e.d.

(quod erat demonstrandum)