Zadania „ Niestandardowe rozwiązania zadań geometrycznych " . 15.01.2011.

1. Na bokach trójkąta ABC zewnętrznie zbudowano trójkąty równoboczne ABP, ACQ, BCR. Udowodnij, że CP =BQ = AR.
2. Trójkąty równoboczne ABC i ADE mają wspólny wierzchołek A oraz oznaczenie wierzchołków w tym samym kierunku. Niech P będzie środkiem odcinka BD a Q środkiem odcinka CE. Udowodnij, że trójkąt APQ jest równoboczny.
3. Dla danych trzech punktów A, B, C znaleźć punkt P taki, że suma AP + BP + CP jest najmniejsza.
4. Dany jest czworokąt wypukły ABCD. Udowodnij,że jego pole jest mniejsze niż połowa sumy AD BC + AB CD.
5. Dany jest trapez ABCD (AB || CD) . Niech M oznacza przecięcie dwusiecznych kątów A i D a punkt N przecięcie dwusiecznych kątów B i C . Udowodnij, że
$$2 MN = | AB + CD - AD - BC |.$$
6. Punkt M leży na AB średnicy okręgu . Cięciwa CD przechodzi przez M i nachylona jest do AB pod kątem 45 stopni. Udowodnij, że wielkość $CM^2 + DM^2$ nie zależy od wyboru punktu M.
7. Okrąg przecina boki AB, AC, BC trójkąta ABC w punktach C', C”, B', B”, A' A” odpowiednio. Udowodnij, że jeżeli prostopadłe do boków w punktach A', B”, C' przecinają się w jednym punkcie, to prostopadłe do boków wystawione w punktach A”, B”, C” też.
8. W równoległoboku ABCD obrano wewnątrz punkt O taki, że suma kątów AOB i Cod wynosi 180 stopni. Udowodnij, że kąty OBC i ODC są równe.
9. Niech w trójkącie ABC punkt H oznacza punkt przecięcia wysokości, punkt M środkowych, punkt O środek okręgu opisanego. Udowodnij, że punkty H, O, M są współliniowe oraz MH = 2 OH.

10. Cztery okręgi są parami styczne zewnętrznie w punktach A, B, C, D. Udowodnij, że punkty te leżą na jednym okręgu.
11. Okręgi S i T są styczne zewnętrznie w punkcie M i styczne wewnętrznie do okręgu W w punktach A i B odpowiednio. Przez punkt M poprowadzono wspólną styczną do S i T , przecinająca W w punkcie C. Proste AC i BC przecinają okręgi S i T w punktach A' i B' odpowiednio. Udowodnij, że prosta A' B' jest wspólna styczna okręgów S i T.