

Tematy do opracowania na warsztatach 2011.06.07.

Wydział MiNI PW

Temat: Nieskończoność.

1. (a) Wykazać, że zbiór liczb całkowitych jest przeliczalny.
(b) Wykazać, że zbiór liczb pierwszych jest przeliczalny.
(c) Wykazać, że zbiór liczb ułamkowych (wymiernych) dodatnich jest przeliczalny.
(d) Wykazać, że zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny.
2. Bierzemy pod uwagę zbiór punktów na odcinku o długości jednego metra, które odpowiadają liczbom wymiernym.
Dysponujemy złotym drutem, którego metr ma masę jednego kilograma.
Spróbować przykryć wszystkie punkty wymierne kawałeczkami drutu o dodatniej długości, żeby masa wszystkich użytych kawałków była nie większa niż 10 g.
Czy są po tej operacji miejsca na odcinku, w których nie ma złota?
3. Czy odcinek o długości 2 metry i sześciąt o krawędzi 1 metra są zbiorami równolicznymi, czy nie?
Jeśli nie, to który jest bardziej liczny?
4. Po jakim czasie mniej więcej Achilles dogoni zółwia, jeśli Achilles biegnie 100 metrów w 20 sekund, a wyjątkowy zółw dysponuje środkami energetyzującymi, dzięki którym jest tylko o połowę wolniejszy. Zółw zaczyna ucieczkę z Tarnowa i pędzi w kierunku Krakowa i dalej, a Achilles zaczyna gonić z Warszawy.
Zakładamy, że Achilles zna się trochę na geometrii i biegnie w inteligentny sposób, a zółw bezmyślnie.
Obydwaj muszą co 2 godziny zrobić godzinne przerwy w biegu, a co trzecia przerwa musi trwać 4 godziny.
5. Układamy jedna nad drugą belki o długości dwóch metrów. Przesunięcie najwyższej do drugiej w prawo jest równe x_1 . Przesunięcie drugiej w stosunku do trzeciej od góry jest równe x_2 i tak dalej.
Układamy w taki sposób, żeby to się nie zawaliło, ale żeby te przesunięcia były możliwie duże. Wynika stąd, że dla każdej warstwy n belek od góry ich środek ciężkości musi leżeć nad belką o numerze $n+1$.
Wiadomo, że środek ciężkości jednakowych mas położonych na prostej jest położony w miejscu, które jest średnią arytmetyczną ich środków ciężkości.
Znaleźć maksymalne możliwe wysunięcia belek względem siebie.
Wysnuć stąd wniosek, że suma tych wysunięć będzie rosła do nieskończoności.

Wskazówka: Najlepiej zacząć analizować taką stertę od góry. Najpierw dla dwóch belek, później trzech i w końcu ogólnie. Pełny dowód wymaga zastosowania indukcji matematycznej.

Wskazówka: Trzeba będzie skorzystać z faktu, że sumy odwrotności kolejnych liczb naturalnych rosną do nieskończoności.
O ile dowód tego nie będzie zrobiony na wykładzie (a prawdopodobnie czasu nie wystarczy), to można zrobić na warsztatach.