Twierdzenie 1 (Nierówność trójkąta)**.** *Niech $|AB|$ oznacza odległość punktu A od B na płaszczyźnie. Niech A, B, C będą punktami (niekoniecznie różnymi). Zachodzi wtedy:*

$$|AB| \leqslant |AC| + |BC|.$$

Równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, kiedy punkt C leży na odcinku AB.

Zadanie 2. *W wierzchołkach A, B, C trójkata równobocznego mieszkają zwierzaki. W wierzchołku A – trzech, B – czterech, C – siedmiu. Gdzie w trójkącie powinni się spotkać, by przebyta przez nich wszystkich droga była jak najmniejsza?*

Zadanie 3. *Udowodnij poniższe nierówności (a, b są liczbami rzeczywistymi):*

(a) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab.$

(b) $a^2 + 4ab + 5b^2 \geqslant 0.$

(c) $a^2 + b^2 \geqslant ab.$

(d) $2a^2 + ab + 5b^2 \geqslant 0.$

Twierdzenie 4. *Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami oraz niech $K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$, $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$. Zachodzi wtedy tzw. nierówność między średnimi:*

$$K_n \geqslant A_n \geqslant G_n \geqslant H_n$$

oraz równości w powyższych nierównościach zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Zadanie 5. *Udowodnij, że dla dodatniej liczby rzeczywistej t zachodzi $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$.*

Zadanie 6. *Udowodnij, że dla liczb a, b o takim samym znaku zachodzi nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.*

Zadanie 7. *Udowodnij, że dla dodatniej liczby rzeczywistej x zachodzi*

$$x^4 + x^6 \geqslant 2x^5.$$

Zadanie 8. *Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi*

$$x + x + \frac{1}{x^2} \geqslant 3.$$

Zadanie 9. *Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$.*

Zadanie 10. *Udowodnij, ze jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają $a + b + c = 0$, to $ab + ac + bc \leqslant 0$.*

Zadanie 11. *Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi $(a + b)(a + c)(b + c) \geqslant 8abc$.*

Zadanie 12 (Zadanie z Kursu maturalnego Koła Naukowego Matematyków PW – są na fb)**.** *Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b zachodzi $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant 8$.*

Zadanie 13. *Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, gdzie $x > 0$.*

Zadanie 14. *Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, gdzie $x > 0$.*

Zadanie 15. *Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, gdzie $x > 0$.*

Zadanie 16. *Znajdź najmniejszą wartość funkcji* $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$*, gdzie* $x > 0$.

Zadanie 17. *Znajdź najmniejszą wartość funkcji* $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$*, gdzie* $x > 0$.

Zadanie 18. *Znajdź najmniejszą wartość funkcji* $f(x) = x + x^3 + \frac{2}{x^2}$*, gdzie* $x > 0$.

Zadanie 19. *Znajdź największą wartość funkcji* $f(x) = x(6-x)$*, gdzie* $x \in (0, 6)$.

Zadanie 20. *Znajdź największą wartość funkcji* $f(x) = 3x(6-3x)$*, gdzie* $x \in (0, 2)$.

Zadanie 21. *Znajdź największą wartość funkcji* $f(x) = x(6-3x)$*, gdzie* $x \in (0, 2)$.

Zadanie 22. *Znajdź największą wartość funkcji* $f(x) = x \cdot x \cdot (6-2x)$*, gdzie* $x \in (0, 3)$.

Zadanie 23. *Znajdź największą wartość funkcji* $f(x) = x \cdot x \cdot x(6-3x)$*, gdzie* $x \in (0, 2)$.

Zadanie 24. *Znajdź największą wartość funkcji* $f(x) = x^2(6-x)$*, gdzie* $x \in (0, 6)$.

Zadanie 25. *Liczbę* 2020 *rozłóż na sumę czterech składników, dla których suma ich kwadratów jest najmniejsza.*

Zadanie 26. *Rozwiąż problem izoperymetryczny wśród prostokątów – mianowicie, uzasadnij, że wśród wszystkich prostokątów o ustalonym obwodzie* $2p$ *największe pole ma kwadrat.*

Zadanie 27. *Rozwiąż problem izoperymetryczny wśród trójkątów – mianowicie, uzasadnij, że wśród wszystkich trójkątów o ustalonym obwodzie* $2p$ *największe pole ma trójkąt równoboczny (skorzystaj ze wzoru Herona).*

Zadanie 28. *Udowodnij, ze jeżeli dodatnie liczby rzeczywiste* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *spełniają* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant 1$*, to zachodzi*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant n^2.$$

Poniżej znajdują się typowe zadania maturalne, które standardowo rozwiązuje się tzw. rachunkiem różniczkowym – można jednak o wiele szybciej zrobić je przy pomocy metod z nierówności przy wykorzystaniu nierówności między średnimi.

Zadanie 29. *Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o stosunku boków* $1 : 3$*. Objętość bryły jest równa* 12*. Oblicz wymiary tego prostopadłościanu, aby jego powierzchnia całkowita była najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą powierzchnię.*

Zadanie 30. *Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne o krawędzi bocznej równej 3. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego z tych ostrosłupów, dla którego pole przekroju płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy oraz wierzchołek ostrosłupa jest największe możliwe.*

Zadanie 31. *Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.*

Zadanie 32. *Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne o ramionach długości 6. Oblicz cosinus kąta między ramionami tego z tych trójkątów, dla którego objętość bryły powstałej w wyniku obrotu trójkąta dokoła prostej zawierającej jego podstawę jest największa możliwa. Oblicz tę największą objętość.*

Zadanie 33. *Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy 1:2 oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.*