

**Zadanko 1.** Udowodnij nierówności:

a)  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .

d)  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ .

b)  $2a^2 + 4ab + 3b^2 \geq 0$ .

e)  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ,  $a, b > 0$ .

c)  $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ .

f)  $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ ,  $a, b > 0$ .

**Zadanko 2.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b, c$  zachodzi  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ .

**Zadanko 3.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi  $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$ .

**Zadanko 4.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b, c$ , takich, że  $a + b + c = 0$  zachodzi  $ab + ac + bc \leq 0$ .

**Zadanko 5.** Omówienie Trójkąta Pascala ;)

**Zadanko 6.** Udowodnij (algebraicznie oraz „bez słów”), że zachodzi następująca równość:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

**Zadanko 7.** Uporządkuj rosnąco następujące liczby:

$$2018^2, \quad 2015 \cdot 2021, \quad 2016 \cdot 2020, \quad 2017 \cdot 2019.$$

**Zadanko 8.** Oblicz, nie używając kalkulatora, wartość wyrażenia:

a)  $101 \cdot 99$ ,

e)  $55^2 + 45^2$ ,

b)  $71 \cdot 69$ ,

f)  $202^2 - 203^2$ ,

c)  $1003 \cdot 997$ ,

g)  $(20 - 7)(20 + 7) + 24^2$ .

d)  $504 \cdot 496$ ,

h)  $34^2 - (10 + 3)(10 - 3)$ .

**Zadanko 9.** Oblicz:

a)  $(\sqrt{2} + 4)^2$ ,

e)  $(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$ ,

b)  $(3 - \sqrt{5})^2$

f)  $(10\sqrt{6} + 3)(10\sqrt{6} - 3)$ ,

c)  $(4\sqrt{3} + 5\sqrt{2})^2$ ,

g)  $(3\sqrt{5} - 7)(3\sqrt{5} + 7)$ .

d)  $(2\sqrt{10} - 5\sqrt{2})^2$ ,

h)  $34^2 - (10 + 3)(10 - 3)$ .

**Zadanko 10.** Rozwiąż równania:

a)  $(x - 1)^2 - (x + 4)^2 = -2x + 1$ ,

b)  $(x + 1)^2 + (x - 3)(x + 3) - 2 = 2(x - 1)^2$ .

**Zadanko 11.** Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a)  $\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$ ,

c)  $\frac{\sqrt{2} - 3}{3 + \sqrt{2}}$ ,

b)  $\frac{\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3} - 1}$ ,

d)  $\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}}$ .

**Zadanko 12.** Wykaż, że podane liczby są liczbami całkowitymi:

a)  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}$ ,

c)  $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$ ,

b)  $\frac{1}{3 + \sqrt{6}} + \frac{1}{3 - \sqrt{6}}$ ,

d)  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}}$ .

**Zadanko 13.** Wiadomo, że

a)  $a^2 + b^2 = 25$  oraz  $ab = 12$ . Oblicz  $(a - b)^2$ .

b)  $a^2 + b^2 = 130$  oraz  $(a + b)^2 = 225$ . Oblicz  $ab$  oraz  $(a - b)^2$ .

c)  $a^2 - b^2 = 36$  oraz  $a - b = 2$ . Oblicz  $a - b = 2$ . Oblicz  $a + b$  oraz  $a$  i  $b$ .

**Zadanko 14.** Czy liczba 9997 jest liczbą złożoną? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanko 15.** Udowodnij, że liczba:

a)  $6^{20} - 1$  jest podzielna przez 5,

b)  $3^{30} - 1$  jest podzielna przez 2,

c)  $3^{30} - 1$  jest podzielna przez 8,

d)  $5^{24} - 2^{24}$  jest podzielna przez 3,

e)  $5^{24} - 2^{24}$  jest podzielna przez 21.

**Zadanko 16.** Zapisz podane liczby palindromiczne, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dla dwóch liczb rzeczywistych:

a) 11,

b) 101,

c) 1001,

d) 10001.

**Zadanko 17.** Usuń niewymierności z mianowników:

a)  $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ .

c)  $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$ .

b)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ .

d)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{10} + \sqrt{15}}$ .

**Zadanko 18.** Udowodnij, że liczba  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$  jest liczbą całkowitą.

**Zadanko 19.** Udowodnij, że liczba  $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$  jest liczbą całkowitą.