MiNI Akademia - Jak wykrywać i poprawiać błędy

Warsztaty 18.11.2017

Kody wagowe z jednym symbolem kontrolnym

1. Pokazać, że kod EAN-13 wykrywa pojedynczy błąd zamiany jednej cyfry na inną.

2. Sprawdzić, czy kod EAN-13 wykrywa pojedynczy błąd wymiany j-tej cyfry z $j+1$-wszą.

Odległość i waga

Dla $\boldsymbol{c} = c_1 \ldots c_n$ i $\boldsymbol{f} = f_1 \ldots f_n$, gdzie $c_i, f_i \in \{0, 1\}$:

$$\boldsymbol{c} + \boldsymbol{f} := (c_1 +_2 f_1) \ldots (c_n +_2 f_n)$$

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{f} := (c_1 \cdot_2 f_1) \ldots (c_n \cdot_2 f_n)$$

Wagą $wt(\boldsymbol{c})$ ciągu binarnego $\boldsymbol{c}$ nazywamy liczbę występujących w $\boldsymbol{c}$ jedynek.
Kod $\mathcal{C}$ nazywamy *liniowym*, jeśli dla $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f} \in \mathcal{C}$, również $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{f} \in \mathcal{C}$.

Niech $\boldsymbol{c}$ i $\boldsymbol{f}$ będą ciągami binarnymi długości n.

1. Pokazać, że $wt(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{f}) = wt(\boldsymbol{c}) + wt(\boldsymbol{f}) - 2wt(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{f})$.

2. Pokazać, że jeśli $wt(\boldsymbol{c}) = wt(\boldsymbol{f})$ to $d(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f})$ jest liczbą parzystą.

3. Pokazać, że odległość kodu liniowego równa jest minimalnej wadze niezerowych słów kodowych.

4. Niech $\mathcal{C}$ będzie kodem binarnym, którego odległość d jest liczbą nieparzystą i niech $\widehat{\mathcal{C}} := \{c_1 \ldots c_n c_{n+1} \mid c_1 \ldots c_n \in \mathcal{C},\ c_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i (mod 2)\}$ ($\widehat{\mathcal{C}}$ jest tzw. kodem rozszerzonym kodu $\mathcal{C}$). Pokazać, że $d(\widehat{\mathcal{C}}) = d + 1$.

Metody kodowania

1. Binarny kod kontroli parzystości długości n powstaje przez dodanie na końcu każdej wysyłanej wiadomości $c_1 \ldots c_{n-1}$, dodatkowego symbolu $c_n := \sum_{i=1}^{n-1} c_i (mod 2)$.

   (a) Pokazać, że kod kontroli parzystości jest kodem liniowym dla dowolnego n.

   (b) Znaleźć wszystkie słowa kodowe binarnego kodu kontroli parzystości dla $n = 4$. Jaka jest odległość takiego kodu?

   (c) Znaleźć odległość binarnego kodu kontroli parzystości dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

2. Niech H_m będzie tablicą, której i-ta kolumna jest binarną reprezentacją liczby $1 \leqslant i \leqslant 2^m - 1$ zapisaną "z dołu do góry". Niech dla $i = 1, \ldots, m$, $\boldsymbol{w}_i = (w_{i1}, \ldots, w_{in})$ będzie i-tym wierszem tej tablicy. Dla każdego $i = 1, \ldots, m$ utwórzmy równanie o $n = 2^m - 1$ zmiennych $c_1, \ldots, c_n$:

   $$w_{i1} c_1 + w_{i2} c_2 + \ldots + w_{in} c_n = 0. \qquad (0.0.1)$$

   Kodem Hamminga $\mathcal{H}_m$ nazywamy kod długości $n = 2^m - 1$ o m symbolach sprawdzających: $c_1, c_2, c_4, \ldots, c_{2^{m-1}}$, dla którego $\boldsymbol{c} \in \mathcal{H}_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia każde z równań (0.0.1).

(a) Znaleźć równania definiujące symbole sprawdzające c_1, c_2, c_4 w kodzie Hamminga $\mathcal{H}_3$.

(b) Sprawdzić, czy $\boldsymbol{c} = 0011001$ i $\boldsymbol{f} = 1100101$ są słowami kodowymi kodu $\mathcal{H}_3$.

(c) Wiedząc, że podczas transmisji został popełniony tylko jeden błąd odkodować: 0011111.

(d) Znaleźć wszystkie słowa kodowe kodu $\mathcal{H}_3$.

(e) Jaka jest odległość kodu $\mathcal{H}_3$?

(f) Obliczyć, ile jest wszystkich słów kodowych wagi $w = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ w kodzie Hamminga $\mathcal{H}_3$.

Liczba słów kodowych

1. Obliczyć, jaka jest maksymalna liczba binarnych ciągów długości n, odległości co najmniej $2d$ i wagi równej $w < d$.

2. Obliczyć, jaka jest maksymalna liczba binarnych ciągów długości n, odległości co najmniej $2d$ i wagi równej $w = d$.

3. Pokazać, że binarnych ciągów długości n, odległości co najmniej $2d - 1$ i wagi równej w jest tyle samo, co wszystkich binarnych ciągów długości n, odległości co najmniej $2d$ i wagi równej w.

4. Pokazać, że w liniowym kodzie binarnym albo wszystkie słowa kodowe mają parzystą wagę, albo dokładnie połowa z nich ma wagę parzystą a połowa nieparzystą.

Kody doskonałe

Niech $\mathcal{C}$ będzie binarnym kodem długości n, odległości $d = 2t + 1$, który ma 2^k słów kodowych. Kule $K(\boldsymbol{c}, t)$ o promieniu t wokół słów kodowych $\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$ są rozłączne. Jeżeli w tych kulach $K(\boldsymbol{c}, t)$ mieszczą się wszystkie ciągi binarne długości n, tzn. gdy zachodzi równość

$$2^k(1 + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{t}) = 2^n$$

kod $\mathcal{C}$ nazywamy doskonałym.

1. Sprawdzić, czy kod Hamminga dla dowolnego m jest doskonały.

2. Jaką długość muszą mieć binarne kody doskonałe poprawiające błędy pojedyncze?

3. Czy istnieje binarny kod doskonały poprawiający błędy podwójne?

4. Niech A_i będzie liczbą słów kodowych wagi i w binarnym kodzie $\mathcal{C}$. Niech $\mathcal{C}$ będzie kodem doskonałym długości n, poprawiającym błędy pojedyncze. Pokazać, że dla każdego $0 \leqslant i \leqslant n$,

$$(i + 1)A_{i+1} + A_i + (n - i + 1)A_{i-1} = \binom{n}{i}.$$