

O PISANIU BAJEK MATEMATYCZNYCH,

CZYLI O KOMBINOWANIU
W KOMBINATORYCE.



**WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH**

mgr inż. Michał Zwierzyński



JAK UDOWODNIĆ TAKĄ STRASZNĄ RÓWNOŚĆ?



$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} k! \cdot \prod_{i=1}^{n-k} (2i-1) \right) + \binom{2n}{n} n! = 3^n \prod_{i=1}^n (2i-1)$$



MATEMATYCZNE BAJKI.

SPIS TREŚCI.

- Po co one są?
- Podstawowe zasady bajkopisarzy matematycznych.
 - Reguła mnożenia i dodawania.
 - Reguła leniwego matematyka.
 - Zasada silni.
 - Zasada wyboru.
 - Ilość wszystkich podzbiorów.
- Przykłady bajek.
 - Kotki.
 - Studenci na egzaminie.
 - Ali-Baba i rozbójnicy.



Źródło: wikipedia.com



MATEMATYCZNE BAJKI.

SPIS TREŚCI.

- **Po co one są?**
- Podstawowe zasady bajkopisarzy matematycznych.
 - Reguła mnożenia i dodawania.
 - Reguła leniwego matematyka.
 - Zasada silni.
 - Zasada wyboru.
 - Ilość wszystkich podzbiorów.
- Przykłady bajek.
 - Kotki.
 - Studenci na egzaminie.
 - Ali-Baba i rozbójnicy.



MATEMATYCZNE BAJKI.

PO CO ONE SĄ?

- Dowodzenie (niekiedy zawiłych) wzorów w przystępny i zrozumiały, intuicyjny sposób.
- Rozwijanie wyobraźni.
- Wzory kombinatoryczne, jak sama nazwa wskazuje opierają się na kombinowaniu ☺
- Wymyślanie własnych wzorów na podstawie różnych bajek opisujących to samo zdarzenie.



MATEMATYCZNE BAJKI.

SPIS TREŚCI.

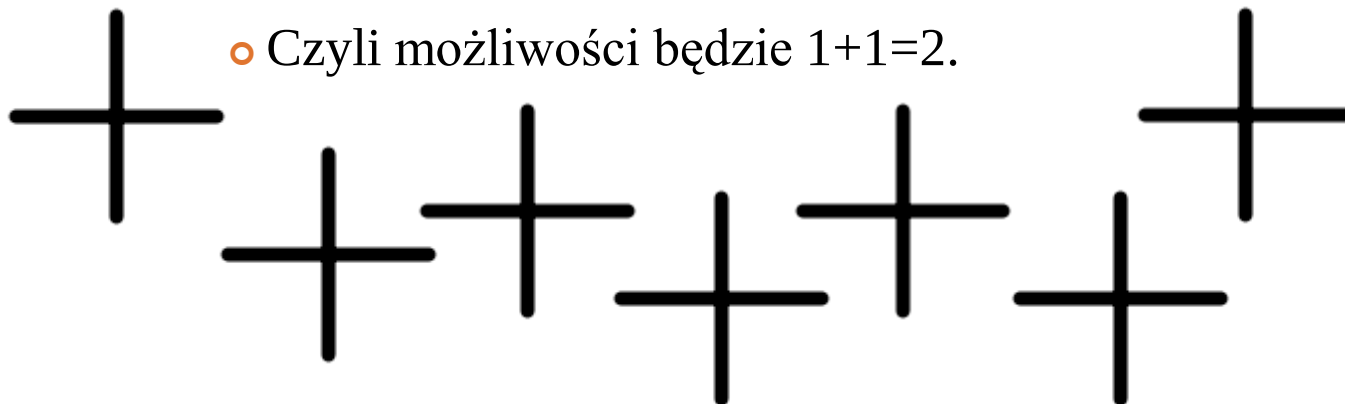
- Po co one są?
- **Podstawowe zasady bajkopisarzy matematycznych.**
 - **Reguła mnożenia i dodawania.**
 - Reguła leniwego matematyka.
 - Zasada silni.
 - Zasada wyboru.
 - Ilość wszystkich podzbiorów.
- Przykłady bajek.
 - Kotki.
 - Studenci na egzaminie.
 - Ali-Baba i rozbójnicy.



PODSTAWOWE ZASADY.

REGUŁA MNOŻENIA I DODAWANIA.

- Gdy w opowiadananej przez nas bajce użyjemy słowa „lub”, czyli zazwyczaj opisujemy zupełnie inną sytuację, w zapisie matematycznym używamy znaku dodawania „+”.
- Gdy chcemy policzyć ilość możliwych wyników w rzucie symetryczną monetą, możemy uczynić to następująco:
 - „Wyrzucimy orła lub reszkę”
 - Czyli możliwości będzie $1+1=2$.



PODSTAWOWE ZASADY.

REGUŁA MNOŻENIA I DODAWANIA.

- Gdy w opowiadananej przez nas bajce użyjemy słowa „i”, czyli opisujemy zazwyczaj tę samą sytuację, jej kontynuację, w zapisie matematycznym używamy znaku mnożenia „ $\cdot$ ”.

- Gdy chcemy policzyć ilość możliwości wyników przy dwóch rzutach symetryczną, sześcienną kostką do gry, możemy uczynić to następująco:

- W pierwszym rzucie możemy otrzymać 6 wyników i w drugim rzucie możemy otrzymać 6 wyników.

- Czyli ilość wyników będzie równa: $6 \cdot 6 = 36$.



MATEMATYCZNE BAJKI.

SPIS TREŚCI.

- Po co one są?
- **Podstawowe zasady bajkopisarzy matematycznych.**
 - Reguła mnożenia i dodawania.
 - **Reguła leniwego matematyka.**
 - Zasada silni.
 - Zasada wyboru.
 - Ilość wszystkich podzbiorów.
- Przykłady bajek.
 - Kotki.
 - Studenci na egzaminie.
 - Ali-Baba i rozbójnicy.



PODSTAWOWE ZASADY.

REGUŁA LENIWEGO MATEMATYKA.

- Matematycy są **leniwi**, w tym sensie, że nie chce im się zbyt dużo pisać i wymyślają dziwne symbole, które skracają zapis ☺
- Na przykład zamiast napisać po polsku:

„Istnieje taka liczba naturalna dodatnia n , której kwadrat jest równy 225”

matematyk pisze:

$$\exists_{n \in \mathbb{N}^+} \quad n^2 = 225$$



PODSTAWOWE ZASADY.

REGUŁA LENIWEGO MATEMATYKA.

- Poznamy teraz skrócony zapis dodawania:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n$$

- Na przykład zamiast pisać:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 + 7^4 + 8^4 + 9^4 + 10^4$$

- możemy napisać:

$$\sum_{k=1}^{10} k^4$$



PODSTAWOWE ZASADY.

REGUŁA LENIWEGO MATEMATYKA.

- Poznamy teraz skrócony zapis mnożenia:

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot \dots \cdot a_n$$

- Na przykład zamiast pisać:

$$(1^2 + \sqrt{1})(2^2 + \sqrt{2})(3^2 + \sqrt{3})(4^2 + \sqrt{4})(5^2 + \sqrt{5})(6^2 + \sqrt{6})$$

- możemy napisać:

$$\prod_{k=1}^6 (k^2 + \sqrt{k})$$



PODSTAWOWE ZASADY.

REGUŁA LENIWEGO MATEMATYKA.

- Przykłady zastosowań reguł skróconego zapisu dodawania oraz mnożenia:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

MATEMATYCZNE BAJKI.

SPIS TREŚCI.

- Po co one są?
- **Podstawowe zasady bajkopisarzy matematycznych.**
 - Reguła mnożenia i dodawania.
 - Reguła leniwego matematyka.
 - **Zasada silni.**
 - Zasada wyboru.
 - Ilość wszystkich podzbiorów.
- Przykłady bajek.
 - Kotki.
 - Studenci na egzaminie.
 - Ali-Baba i rozbójnicy.



PODSTAWOWE ZASADY.

ZASADA SILNI.

- Silnię liczby naturalnej definiujemy następująco:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n & \text{dla } n > 0 \end{cases}$$

- Silnia liczby n jest to inaczej iloczyn wszystkich liczb naturalnych do n włącznie.

- Np.

- $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

- $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$

- $\frac{22!}{20!} = \frac{20! \cdot 21 \cdot 22}{20!} = \frac{21 \cdot 22}{1} = 462$



PODSTAWOWE ZASADY.

ZASADA SILNI.

- Policzmy ile jest sposobów ustawienia n osób w szereg.

- ROZWIĄZANIE:

- Na pierwszym miejscu mamy n możliwości ustawienia osoby, na drugim miejscu mamy już $n - 1$ możliwości ustawienia osoby, na trzecim już $n - 2$, ..., a na ostatnim miejscu mamy już tylko 1 możliwość ustawienia osoby (wszystkie inne osoby już stoją na pozostałych miejscach).

- Reasumując ilość wszystkich możliwości jest równa:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$



MATEMATYCZNE BAJKI.

SPIS TREŚCI.

- Po co one są?
- **Podstawowe zasady bajkopisarzy matematycznych.**
 - Reguła mnożenia i dodawania.
 - Reguła leniwego matematyka.
 - Zasada silni.
 - **Zasada wyboru.**
 - Ilość wszystkich podzbiorów.
- Przykłady bajek.
 - Kotki.
 - Studenci na egzaminie.
 - Ali-Baba i rozbójnicy.



Źródło: wikipedia.com



PODSTAWOWE ZASADY.

ZASADA WYBORU.

- Symbol Newtona definiujemy następująco:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

- Przyjmując ponadto, że dla $k > n$ zachodzi $\binom{n}{k} = 0$.

- Obliczmy na przykład:

$$\begin{aligned}\binom{10}{3} &= \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{3!} = \\ &= \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 120\end{aligned}$$

- Przekonamy się za chwilę jaki sens kombinatoryczny kryje się w symbolu Newtona.



PODSTAWOWE ZASADY.

ZASADA WYBORU.

- Zadanie: Na ile sposobów można ustawić n różnych książek na półce?
- Rozwiązanie I:
 - Jest to inaczej ustawienie n książek w szereg, więc otrzymamy dokładnie $n!$ możliwości.



PODSTAWOWE ZASADY.

ZASADA WYBORU.

- Zadanie: Na ile sposobów można ustawić n różnych książek na półce?
- Rozwiązanie II:
 - Niech k – pewna liczba naturalna $k \leq n$.
 - Spośród wszystkich n miejsc na półce wybieramy najpierw k miejsc (ilość tych wyborów oznaczmy przez C_n^k), następnie na wybranych miejscach rozmieszczamy dowolnie k pierwszych książek – mamy więc $k!$ takich możliwości. Pozostało nam jeszcze $(n - k)$ książek do rozmieszczenia na dokładnie $(n - k)$ miejscach – ilość takich rozmieszczeń jest równa $(n - k)!$.
 - Tym sposobem ilość rozmieszczeń książek na półce jest równa:
$$C_n^k \cdot k! \cdot (n - k)!$$



PODSTAWOWE ZASADY.

ZASADA WYBORU.

- Zadanie: Na ile sposobów można ustawić n różnych książek na półce?

- Wniosek:

- Policzyliśmy ilość możliwości na dwa różne sposoby, skąd otrzymaliśmy równość:

$$n! = C_n^k \cdot k! \cdot (n - k)!$$

- Po wyznaczeniu C_n^k :

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n - k)!} = \binom{n}{k}$$

- Otrzymaliśmy więc, że ilość sposobów wyboru k obiektów spośród n obiektów jest równa $\binom{n}{k}$.
(nie muszą być to rzecz jasna zawsze książki ☺)



PODSTAWOWE ZASADY.

ZASADA WYBORU.

- Przydatne wzory:

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

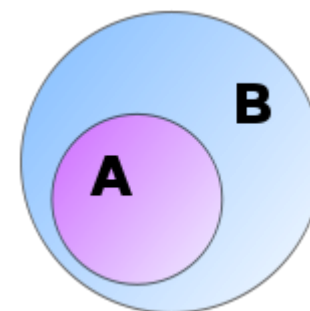
Uzasadnienie: kombinatoryczne (lub w ostateczności ze wzoru ☺)



MATEMATYCZNE BAJKI.

SPIS TREŚCI.

- Po co one są?
- **Podstawowe zasady bajkopisarzy matematycznych.**
 - Reguła mnożenia i dodawania.
 - Reguła leniwego matematyka.
 - Zasada silni.
 - Zasada wyboru.
 - **Ilość wszystkich podzbiorów.**
- Przykłady bajek.
 - Kotki.
 - Studenci na egzaminie.
 - Ali-Baba i rozbójnicy.



PODSTAWOWE ZASADY.

IŁOŚĆ WSZYSTKICH PODZBIORÓW.

- Policzmy za chwilę na dwa sposoby ilość wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego.
 - Zauważmy najpierw, że symbol $\binom{n}{k}$ określa nam ilość możliwych podzbiorów k -elementowych zbioru n -elementowego.
 - Wynika to bezpośrednio z tego, że $\binom{n}{k}$ oznacza ilość możliwych wyborów k rzeczy spośród n rzeczy.



PODSTAWOWE ZASADY.

IŁOŚĆ WSZYSTKICH PODZBIORÓW.

- By policzyć ilość wszystkich możliwych podzbiorów to zliczamy po kolei:
 - Ilość możliwych podzbiorów 0-elementowych: $\binom{n}{0}$
 - Ilość możliwych podzbiorów 1-elementowych: $\binom{n}{1}$
 - Ilość możliwych podzbiorów 2-elementowych: $\binom{n}{2}$
 - ...
 - Ilość możliwych podzbiorów n -elementowych: $\binom{n}{n}$
 - Skąd ilość wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$



PODSTAWOWE ZASADY. ILOŚĆ WSZYSTKICH PODZBIORÓW.

- Policzmy ilość wszystkich możliwych podzbiorów na inny sposób:
 - Ustawmy wszystkie elementy zbioru w rzędzie. Na każdej pozycji stoi inny element należący do zbioru. Mamy więc n pozycji. Przy każdej z nich umieścimy żarówkę. Zapalona żarówka będzie oznaczała, że element, przy którym stoi będzie należał do rozważanego podzbioru.



PODSTAWOWE ZASADY. ILOŚĆ WSZYSTKICH PODZBIORÓW.

- Policzmy ilość wszystkich możliwych podzbiorów na inny sposób:
 - Zauważmy, że ilość wszystkich podzbiorów będzie równa wszystkim możliwym ustawieniom włączonych/ wyłączonych żarówek. A ile ich będzie? Pierwsza żarówka ma dwie możliwości – albo się świeci, albo nie; druga tak samo, tak jak i trzecia i każda kolejna, więc ilość, więc ilość wszystkich możliwości będzie równa:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_n = 2^n$$



PODSTAWOWE ZASADY. ILOŚĆ WSZYSTKICH PODZBIORÓW.

- Otrzymaliśmy równość:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

- oraz warty zapamiętania fakt, że 2^n oznacza ilość wszystkich możliwych podzbiorów zbioru n -elementowego.

- I to wszystko dzięki żarówkom ☺



PODSTAWOWE ZASADY. ILOŚĆ WSZYSTKICH PODZBIORÓW.



○ Przykład:

- Święty Mikołaj ma w worku n prezentów. Zależnie od tego jak byłeś/ byłaś grzeczna w tym roku Mikołaj może dać kilka prezentów, może dać Ci wszystkie prezenty 😊 albo nie dać żadnego ☹.
- Ile jest wszystkich zestawów prezentów jakie możesz otrzymać?

○ Rozwiązanie:

- Interesuje nas ilość podzbiorów zbioru prezentów, a ponieważ prezentów jest n , to ilość wszystkich możliwości wynosi 2^n .



MATEMATYCZNE BAJKI.

SPIS TREŚCI.

- Po co one są?
- Podstawowe zasady bajkopisarzy matematycznych.
 - Reguła mnożenia i dodawania.
 - Zasada silni.
 - Zasada wyboru.
 - Ilość wszystkich podzbiorów.
- **Przykłady bajek.**
 - **Kotki.**
 - Studenci na egzaminie.
 - Ali-Baba i rozbójnicy.



Źródło: wikipedia.com



KOTKI

- Udowodnimy wzór:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Rozważana sytuacja:

- W schronisku jest n kotków. Pewna dziewczynka, dajmy na to Magda, chce zaadoptować przed świętami k kotków. Ile ma możliwości wzięcia kotków do swojego domu?



Źródło: wikipedia.com

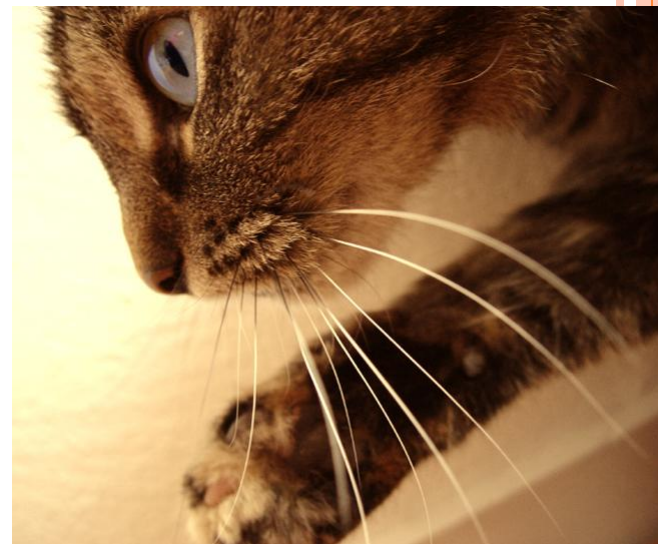
KOTKI

- Udowodnimy wzór:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Lewa strona równości:

- W oczywisty sposób Magda wybiera k kotków spośród n kotków – może to uczynić, dzięki zasadzie wyboru, na $\binom{n}{k}$ sposobów.



Źródło: wikipedia.com

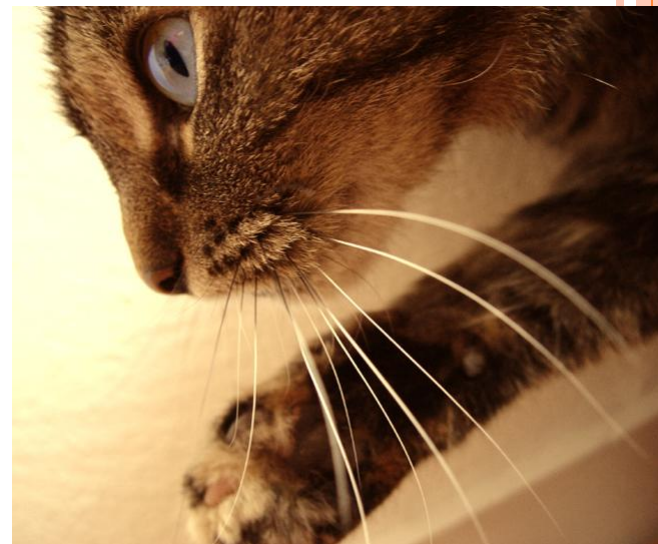
KOTKI

- Udowodnimy wzór:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Prawa strona równości:

- Zamiast wybierać k kotków, które zabierze do domu, dziewczynka wybiera $(n-k)$ kotków, które zostawi w schronisku – może to uczynić na $\binom{n}{n-k}$ sposobów. Resztę, czyli k kotków, weźmie do domu.



Źródło: wikipedia.com

KOTKI

- Obydwie historyjki opisują jedną i tę samą sytuację, i zliczają dokładnie to samo, co dowodzi prawdziwości wzoru:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



Źródło: garfield.wikia.com



MATEMATYCZNE BAJKI.

SPIS TREŚCI.

- Po co one są?
- Podstawowe zasady bajkopisarzy matematycznych.
 - Reguła mnożenia i dodawania.
 - Reguła leniwego matematyka.
 - Zasada silni.
 - Zasada wyboru.
 - Ilość wszystkich podzbiorów.
- **Przykłady bajek.**
 - Kotki.
 - **Studenci na egzaminie.**
 - Ali-Baba i rozbójnicy.



STUDENCI NA EGZAMINIE

- Udowodnimy wzór:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Rozważana sytuacja:
 - Do egzaminu przystąpiło n studentów. Profesor z góry założył, że zda dokładnie k studentów. Na ile sposobów może wybrać tych studentów, którzy zdadzą egzamin?



Źródło: wikipedia.com



STUDENCI NA EGZAMINIE

- Udowodnimy wzór:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Lewa strona równości:
 - Po prostu profesor wybiera k studentów spośród wszystkich n studentów, może to uczynić, zgodnie z zasadą wyboru, na $\binom{n}{k}$ sposobów.



STUDENCI NA EGZAMINIE

- Udowodnimy wzór:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Prawa strona równości.

- Wśród wszystkich studentów jest student **Michał**. Ma on dwie możliwości: albo zda, albo nie zda (wszystko zależy od profesora i od szczęścia Michała).
 - Gdy profesor zadecyduje, że Michał zda, to jeszcze trzeba będzie do niego $(k-1)$ studentów spośród pozostałych $(n-1)$ studentów, którzy zdadzą – można to zrobić na $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów.
 - Gdy jednak profesor zadecyduje, że Michał nie zda, to trzeba będzie spośród pozostałych $(n-1)$ studentów wybrać k , którzy zdadzą, można to zrobić na $\binom{n-1}{k}$ sposobów.
- Czyli otrzymujemy, że można wybrać studentów, którzy zdadzą dokładnie na $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ sposobów.

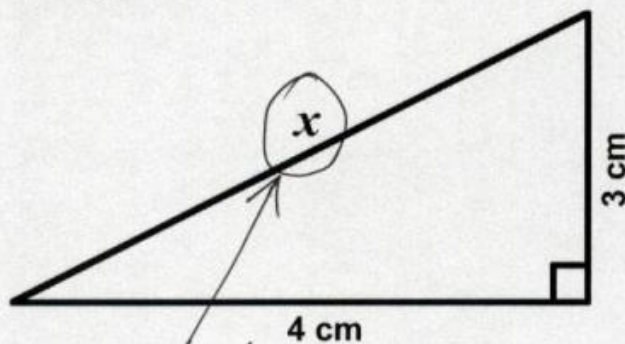


STUDENCI NA EGZAMINIE

- Dzięki opowiedzianym bajkom matematycznym udowodniliśmy wzór:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

3. Znajdź x .



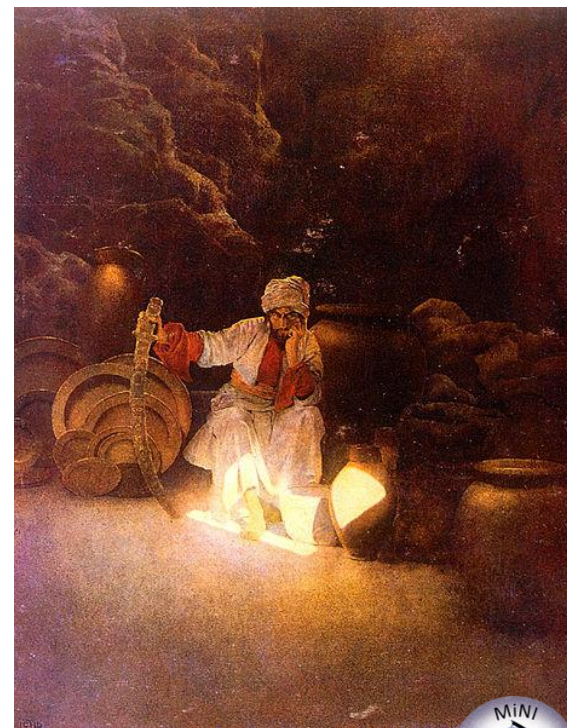
O, tutaj!

Optat

MATEMATYCZNE BAJKI.

SPIS TREŚCI.

- Po co one są?
- Podstawowe zasady bajkopisarzy matematycznych.
 - Reguła mnożenia i dodawania.
 - Reguła leniwego matematyka.
 - Zasada silni.
 - Zasada wyboru.
 - Ilość wszystkich podzbiorów.
- **Przykłady bajek.**
 - Kotki.
 - Studenci na egzaminie.
 - **Ali-Baba i rozbójnicy.**



Źródło: wikiped



ALI-BABA I ROZBÓJNICY



- Udowodnimy wzór:

$$1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + k \binom{n}{k} + \dots + n \binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$



- Rozważana sytuacja:

- Grupa rozbójników planuje napad na przejeżdżającą nieopodal nich karawanę. Na ile sposobów mogą wybrać grupę, która zaatakuje karawanę, jeżeli w takiej grupie trzeba również mianować przywódcę?



ALI-BABA I ROZBÓJNICY

- $1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + k \binom{n}{k} + \dots + n \binom{n}{n} = n2^{n-1}$
- Lewa strona równości:
 - Taka napadająca grupa może się składać z pewnej ilości rozbójników, począwszy od 1, aż do n . Załóżmy, że grupa składa się z k rozbójników. Mamy wtedy dokładnie $\binom{n}{k}$ możliwości wyboru napadającej grupy. Dodatkowo musimy wybrać z grupy składającej się z k ludzi ich przywódcę – mamy wtedy k sposobów (każdy z nich może zostać wybrany na przywódcę). Otrzymaliśmy, że ilość możliwości utworzenia grupy k osobowej z przywódcą jest równa $k \cdot \binom{n}{k}$.
 - Ponieważ liczba k może być równa $1, 2, 3, \dots, n$ to otrzymujemy dokładnie lewą stronę równości.



ALI-BABA I ROZBÓJNICY

$$1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + k \binom{n}{k} + \dots + n \binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

○ Prawa strona równości:

- Zamiast najpierw wybierać osoby, które będą należały do napadającej grupy wybierzmy przywódcę napadającej grupy. Możemy to uczynić na n sposobów (każdy bandyta może być przywódcą). Zostało wtedy $(n-1)$ bandytów, z których iluś musimy przydzielić do wybranego szefa. Wszystkich takich możliwości będzie tyle, ile wszystkich możliwych podzbiorów zbioru $(n-1)$ bandytów, czyli 2^{n-1} . Stąd ilość napadających grup jest równa:

$$n2^{n-1}$$



ALI-BABA I ROZBÓJNICY

-
- Dzięki opowiedzeniu stosunkowo prostej bajki matematycznej udowodniliśmy dosyć skomplikowany wzór matematyczny ☺

$$1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + k \binom{n}{k} + \dots + n \binom{n}{n} = n2^{n-1}$$



O PISANIU BAJEK MATEMATYCZNYCH,

CZYLI O KOMBINOWANIU
W KOMBINATORYCE.



**WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMACYJNYCH**

mgr inż. Michał Zwierzyński

